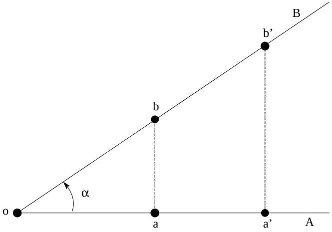
Boldriehoeksmeting

Peter Bueken

Hogere Zeevaartschool
Noordkasteel Oost 6
B-2030 Antwerpen

Operationeel Niveau Nautische Opleiding

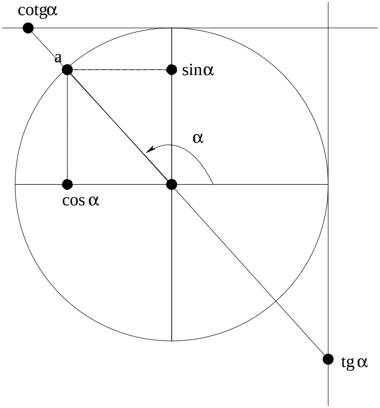
Goniometrische getallen

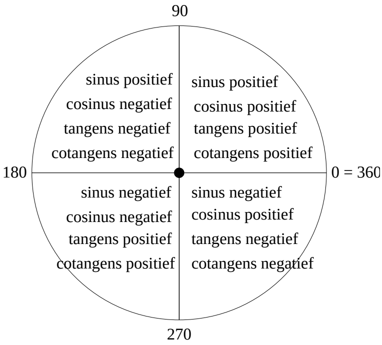


- $$\sin\alpha = \frac{ab}{ob}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{ob}{ab}$$
- $$\cos\alpha = \frac{oa}{ob}, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{ob}{oa}$$
- $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ab}{oa}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{oa}{ab}$$

Goniometrische getallen

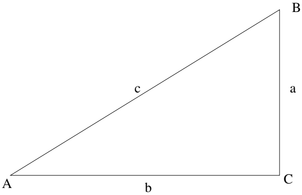
Definitie van goniometrische getallen kan nu veralgemeend worden voor *stompe* hoeken (teken bijvoegen)





Rechthoekige driehoek $\triangle ABC$ in het vlak

A,B grootte van hoek, $C = 90^\circ$
a,b,c lengte van zijde



Som van de hoeken

$$A + B = 90^\circ$$

Goniometrische getallen

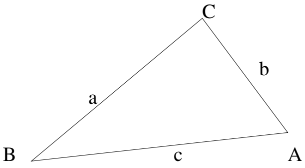
$$\begin{aligned} \sin A &= \cos B = \frac{a}{c} \\ \cos A &= \sin B = \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} A &= \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Willekeurige driehoek $\triangle ABC$ in het vlak

A,B en C grootte van hoek
a,b,c lengte van zijde



Som van de hoeken

$$A + B + C = 180^\circ$$

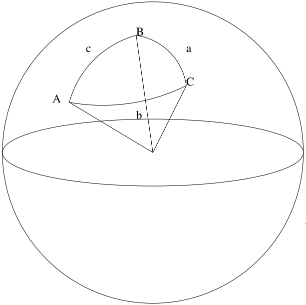
Sinusregel

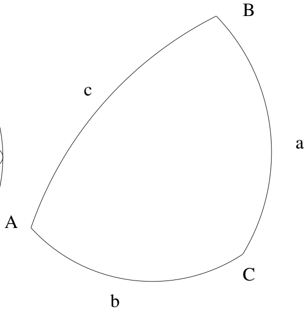
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinusregel

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Oplossen van willekeurige boldriehoeken





Eerste en Tweede cosinusregel

Eerste cosinusregel

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C
\end{aligned}$$

Tweede cosinusregel

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
\cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c
\end{aligned}$$

Sinusregel

Sinusregel

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Cotangensregel

Cotangensregel

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos C &+ \sin C \operatorname{cotg} A\\
\operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos A &+ \sin A \operatorname{cotg} B\\
\operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos B &+ \sin B \operatorname{cotg} C\\
\operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos C &+ \sin C \operatorname{cotg} B\\
\operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos A &+ \sin A \operatorname{cotg} C\\
\operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos B &+ \sin B \operatorname{cotg} A
\end{aligned}$$

Eerste geval: drie zijden

- a, b en c gegeven
- A, B en C berekenen
- Eerste cosinusregel

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Tweede geval: twee zijden en ingesloten hoek

- a, b en C gegeven
- c, A en B berekenen
- Eerste cosinusregel

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

- Cotangensregel

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A$$

$$\operatorname{cotg} b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B$$

Praktische opmerkingen

- Opgave steeds in graden minuten tienden, bv.

$$b = 69^\circ 15,3'$$

- Oplossing steeds in dezelfde notatie geven (afgerond), bv.

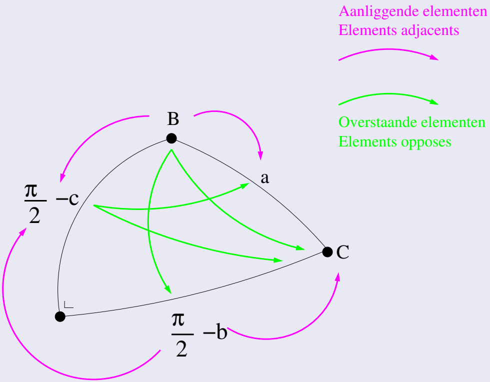
$$c = 50^\circ 15' 43'' = 50^\circ 15,7'$$

  Examen: afwijking van 1 tiende minuut.

- Nooit berekende gegevens recycleren in latere berekeningen! (rekenfouten, afronding)
  Steeds formules gebruiken die slechts één niet-gegeven waarde bevatten

- Lees de handleiding van je rekenmachine, en leer de machine gebruiken!
  Geen vragen over rekenmachines op examen!

Regel van Neper

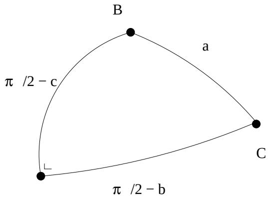


cosinus van een element uit dit schema
= product van de sinussen van de overstaande elementen
= product van de cotangensen van de aanliggende elementen

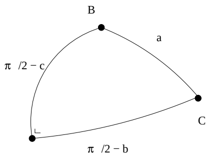
Regel van Neper

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos a & = & \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c)\\ \cos(90^\circ - b) & = & \sin B \sin a\\ \cos(90^\circ - c) & = & \sin C \sin a\\ \cos B & = & \sin C \sin(90^\circ - b)\\ \cos C & = & \sin B \sin(90^\circ - c)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos a & = & \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C\\ \cos(90^\circ - b) & = & \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg}(90^\circ - c)\\ \cos(90^\circ - c) & = & \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}(90^\circ - b)\\ \cos B & = & \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(90^\circ - c)\\ \cos C & = & \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(90^\circ - b)\end{array}\right.$$



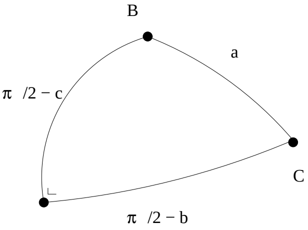
Opmerkingen



$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \cos B = \sin C \cos b, \quad \cos C = \sin B \cos c$$

- Indien we één zijde van 90° hebben ($\cos = 0$),
  is er zeker een tweede zijde van 90°,
  en is er (naast A) ook een tweede hoek (B of C) van 90°
  Bestaat een dergelijke driehoek?
- Indien er *geen* zijden van 90° zijn,
  dan is het *aantal stompe zijden even*
  (twee of geen enkele)

Opmerkingen



$$\cos B = \sin C \cos b, \qquad \cos C = \sin B \cos c$$

- Rechthoekszijde (b, c) en overstaande hoek (B, C) zijn beide scherp, stomp of recht (zelfde soort).