Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Onderwijseenheid 5
Exacte Wetenschappen en Informatica

Calcul vectoriel

D. Aerts, P. Bueken, D. Luyckx

HZS-OE5-NW142 (suppl.)
Première année Bachelor en Sciences Nautiques
Version 1.11
13 Juin 2010

Table des matières

Chapitre 1

Calcul vectoriel

◎ **1.1.** (Labo V1) Soient $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j}$. Déterminez alors

1. $|\vec{a}|$
2. $|\vec{b}|$
3. $|\vec{a} - \vec{b}|$
4. $|4\vec{a}|$
5. $3\vec{a} - 2\vec{b}$
6. $|2\vec{b} - 3\vec{a}|$
7. eenheidsvector in de richting $\vec{b}$
   vecteur unitaire, direction $\vec{b}$
8. $\vec{a}$, hoek met x-as/angle avec axe x

◎ **1.2.** (Labo V1) Déterminez le module des vecteurs donnés, et l'angle formé par le vecteur et l'axe x (orientation positive).

1. $\vec{i} - \vec{j}$
2. $-\vec{i} + \vec{j}$
3. $-\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$

◎ **1.3.** (Labo V1) Pour les vecteurs suivants, déterminez la représentation $a\vec{i} + b\vec{j}$.

1. $\vec{OP}$ met/où $O(0,0), P(4,-2)$
2. $\vec{QR}$ met/où $Q(1,4), R(2,-4)$
3. $\vec{RQ}$ met/où $R(2,-4), Q(1,4)$

◎ **1.4.** (Labo V1) Considérons les vecteurs $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j}$. Déterminez alors

1. het scalair product $\vec{a} \cdot \vec{b}$
   le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$
2. hoek tussen as X en vector $\vec{a} + \vec{b}$
   angle entre axe X et vecteur $\vec{a} + \vec{b}$
3. eenheidsvector, richting $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
   vecteur unitaire, direction $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
4. de hoek tussen $\vec{a}, \vec{b}$
   l'angle entre $\vec{a}, \vec{b}$

◎ **1.5.** (Labo V1) Déterminez, pour les vecteurs donnés $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la projection scalaire et vectorielle de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

1. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}, \qquad \vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j},$
2. $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}, \qquad \vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j}.$

◎ **1.6.** (Labo V1) Démontrez que, si $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

◎ **1.7.** (Labo V1) Considérons les vecteurs $\vec{v} = a\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Déterminez a pour que

1. $\vec{v} \perp \vec{w}$
2. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 10$
3. vectoriële projectie van $\vec{v}$ op $\vec{w}$ is $\vec{v}$
   projection vectorielle de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est $\vec{v}$

◎ **1.8.** (Labo V1) Décomposez le vecteur $\vec{a} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ en une composante parallèle et une composante perpendiculaire au vecteur $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

◎ **1.9.** (Labo V1) Calculez le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

◎ **1.10.** (Labo V1) Considérons les points $A(3,4)$, $B(2,1)$ et $C(5,2)$. Déterminez l'aire du parallélogramme dont les côtés sont AB et AC. Déterminez également l'aire du triangle $\triangle ABC$.

♧ **1.11.** Considérons les vecteurs $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et $\vec{w} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Calculez:

1.	$\lvert\vec{v}\rvert$	8.	$\vec{w} - 2\vec{v}$
2.	$\lvert\vec{w}\rvert$	9.	$3\vec{v} + 4\vec{w}$
3.	$\vec{v} + \vec{w}$	10.	$\lvert 3\vec{v} - 5\vec{w}\rvert$
4.	$\vec{v} - \vec{w}$	11.	$\lvert 4\vec{v} + 5\vec{w}\rvert$
5.	$4\vec{v}$	12.	$\lvert\vec{v} + \vec{w}\rvert - \lvert\vec{v}\rvert$
6.	$-2\vec{w}$	13.	$\vec{v} \cdot \vec{w}$
7.	$\vec{v} + 2\vec{w}$	14.	$\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w}$

♧ **1.12.** Déterminez l'angle formé par les vecteurs $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et $\vec{w} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

♧ **1.13.** Montrez que les vecteurs $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et $\vec{w} = 8\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$ sont perpendiculaires.

♧ **1.14.** Déterminez la projection scalaire et vectorielle du vecteur $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ sur $\vec{w} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Calculez également les projections de $\vec{w}$ sur $\vec{v}$.

1.15. Considérons les vecteurs $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Calculez:

1.	$\lvert\vec{v}\rvert$	8.	$\vec{w} - 2\vec{v}$
2.	$\lvert\vec{w}\rvert$	9.	$3\vec{v} + 4\vec{w}\rvert$
3.	$\vec{v} + \vec{w}$	10.	$\lvert 3\vec{v} - 5\vec{w}\rvert$
4.	$\vec{v} - \vec{w}$	11.	$\lvert 4\vec{v} + 5\vec{w}\rvert$
5.	$4\vec{v}$	12.	$\lvert\vec{v} + \vec{w}\rvert - \lvert\vec{v}\rvert$
6.	$-2\vec{w}$	13.	$\vec{v} \cdot \vec{w}$
7.	$\vec{v} + 2\vec{w}$	14.	$\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w}$

1.16. (Labo V2) Déterminez b_x, b_z et c_y pour que $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ soient mutuellement perpendiculaires.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + 2\vec{j} + b_z\vec{k} \\ \vec{c} &= 3\vec{i} + c_y\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

1.17. (Labo V2) Déterminez un vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \qquad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

1.18. (Labo V2) Pour les vecteurs

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{w} = \vec{j} - \vec{k},$$

déterminez

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $\vec{u} \times \vec{v}$
3. de vectoriële projectie van $\vec{u}$ op $\vec{w}$
   projection vectorielle de $\vec{u}$ sur $\vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

1.19. (Labo V2) Déterminez l'équation de la droite à travers les points $P(-4, 2, 1)$ et $Q(-3, 5, 3)$.

1.20. (Labo V2) Déterminez l'aire du triangle $\triangle ABC$, formé par les points

$$A(0, 2, 1), \quad B(-4, 1, -2), \quad C(1, 1, -2)$$

◎ **1.21.** (Labo V2) Déterminez l'équation du plan passant par les points

$$P(-4,0,2), \quad Q(1,-3,1), \quad R(2,-2,6)$$

◎ **1.22.** (Labo V2) Déterminez l'équation de la droite à travers le point $P(1,2,1)$ et parallèle à la droite, donnée par l'équation

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5}$$

◎ **1.23.** (Labo V2) Déterminez l'équation de la droite à travers le point $P(1,2,2)$ et perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

◎ **1.24.** (Labo V2) Déterminez le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

◎ **1.25.** (Labo V2) Déterminez l'équation du plan passant par le point $A(1,3,-4)$ et perpendiculaire aux plans

$$2x - 4y + 3z = 2, \qquad x - 3y + z = 4.$$

♲ **1.26.** Déterminez l'angle formé par les vecteurs $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

♲ **1.27.** Déterminez la projection scalaire et vectorielle du vecteur $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ sur $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Calculez également les projections de $\vec{w}$ sur $\vec{v}$.

1.28. Considérons les vecteurs $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Calculez:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b}$	4. $\vec{a} \times \vec{b}$	7. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$	10. $\vec{a} \times (\vec{b} \times c)$
2. $\vec{b} \cdot \vec{c}$	5. $\vec{a} \times \vec{c}$	8. $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$	11. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times c$
3. $\vec{c} \cdot \vec{a}$	6. $\vec{b} \times \vec{c}$	9. $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$	12. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$
			13. $(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c})$

1.29. Considérons les vecteurs $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Calculez l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$. Calculez le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.

1.30. Considérons les points $P(4, 11, -3)$, $Q(5, 4, 0)$, $R(-3, -2, 1)$ et $S(0, 2, 6)$ dans l'espace à trois dimensions. Déterminez la projection vectorielle du vecteur $\vec{RS}$ sur le vecteur $\vec{PQ}$.

1.31. Considérons les points $P(-2, -1, 1)$, $Q(4, 2, 9)$, $R(-3, 5, 0)$ en $S(0, 9, 0)$ dans l'espace à trois dimensions.
Déterminez la projection scalaire et la projection vectorielle du vecteur $\vec{PQ}$ sur le vecteur $\vec{RS}$.
Calculez l'angle formé par les vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{RS}$.
Construisez un vecteur unitaire $\vec{n}$ qui est perpendiculaire sur les vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{RS}$.

1.32. Considérons les points $P(1, 1, 8)$, $Q(1, -1, -2)$ et $R(2, -1, 1)$ dans l'espace à trois dimensions.
Déterminez l'équation du plan α à travers les trois points P, Q et R.
Déterminez l'équation du plan à travers le point R, perpendiculaire au vecteur $\vec{PQ}$.
Déterminez l'équation de la droite à travers le point R, parallèle à la droite à travers les points P et Q.
Calculez l'aire du triangle $\triangle PQR$.

1.33. Considérons les points $P(1, 1, 2)$, $Q(1, -1, 8)$ et $R(1, 2, -1)$ dans l'espace à trois dimensions.
Déterminez l'équation du plan α à travers les trois points P, Q et R.
Déterminez l'équation du plan à travers le point R, perpendiculaire au vecteur $\vec{PQ}$.
Déterminez l'équation de la droite à travers le point R, parallèle à la droite à travers les points P et Q.
Calculez l'aire du triangle $\triangle PQR$.

☆ **1.34.** Considérons les points $P(-3,1,8)$, $Q(-2,-3,5)$ en $R(2,14,-4)$ dans l'espace à trois dimensions.

Déterminez l'équation du plan α à travers ces trois points.
Calculez les coordonnées du point S tel que $PQRS$ forme un parallélogramme.
Déterminez l'équation de la droite à travers le point S, perpendiculaire au plan α.
Calculez l'aire du triangle $\triangle PQR$.

☆ **1.35.** Considérons un objet qui se déplace le long d'une courbe α dans le plan, et dont la position au moment t est donnée par l'équation paramétrique

$$x = t^2 + t, \qquad y = t^4.$$

Déterminez le vecteur de vitesse $\vec{v}$ et le vecteur d'accélération $\vec{a}$ de l'objet au moment $t = 1$.
Décrivez le vecteur d'accélération $\vec{a}$ au moment $t = 1$ comme une somme $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ d'un vecteur $\vec{a}_t$ tangent à la courbe et un vecteur $\vec{a}_n$ perpendiculaire à la courbe.

☆ **1.36.** Considérons les points $P(2,-3,4)$, $Q(7,-2,3)$ et $R(9,-5,7)$ dans l'espace à trois dimensions.
Déterminez l'équation du plan α à travers ces trois points.
Calculez les coordonnées du point S tel que $PQRS$ forme un parallélogramme.
Déterminez l'équation de la droite à travers le point S, perpendiculaire au plan α.
Calculez l'aire du triangle $\triangle PQR$.

◎ **1.37.** (Labo V3) Déterminez la dérivée directionnelle, au point $P(1,3)$, de la fonction $z = x^2 e^y$ dans la direction qui forme un angle de $\theta = 60°$ avec l'axe x positif.

◎ **1.38.** (Labo V3) Déterminez la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = \frac{x^2-y}{x+2y}$ au point $P(2,1)$, dans la direction du vecteur $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

◎ **1.39.** (Labo V3) Calculez le gradient, au point $P(2,3)$ de la fonction

$$f(x,y) = y - \frac{3x^2 + y^2}{2}$$

◎ **1.40.** (Labo V3) Démontrez que, pour les champs vectoriels $\vec{A} = 3xy\vec{i} - x^2y\vec{j}$ et $\vec{B} = 2x^2y\vec{i} + x^2z^2\vec{k}$,

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

◎ **1.41.** (Labo V3) Calculez le gradient ∇f de la fonction

$$f = x^2yz^3$$

◎ **1.42.** (Labo V3) Considérons le champ vectoriel $\vec{A} = xy\vec{i} - xy^2\vec{j} + 2xy^2\vec{k}$. Déterminez alors

$$\operatorname{div} \vec{A}$$
$$\operatorname{rot} \vec{A}$$

◎ **1.43.** (Labo V3) Considérons le champ vectoriel $\vec{A} = xz\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} - yz^2\vec{k}$, la fonction $\varphi(x, y, z) = 3x^2y + y^2z^3$ et le point $P(1, -1, 1)$. Déterminez alors

$$\nabla\varphi(P)$$
$$\nabla \cdot \vec{A}(P)$$
$$\nabla \times \vec{A}(P)$$

◎ **1.44.** (Labo V3) Démontrez que, pour le champ vectoriel $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$$\nabla \times (|\vec{r}|^2\vec{r}) = 0.$$

☆ **1.45.** Considérons une fonction f et un champ vectoriel $\vec{F}$, donnés par

$$f(x, y, z) = \frac{yz}{1 + x^2}, \qquad \vec{F} = xe^{yz}\vec{i} + ye^{zx}\vec{j} + ze^{xy}\vec{k},$$

le point $P(1, 1, -1)$ et le vecteur $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ dans l'espace à trois dimensions.
Calculez le gradient $\operatorname{grad} f$ de la fonction f dans le point P.
Calculez la divergence $\operatorname{div} \vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ dans le point P.
Calculez le rotationnel $\operatorname{rot} \vec{F}$ du champ vectoriel dans le point P.
Calculez la dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction du vecteur $\vec{v}$ au point P.

☆ **1.46.** Déterminez la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2-z^2}$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ au point $P(2,1,3)$.

☆ **1.47.** Considérons la fonction

$$f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{2xz},$$

le champ vectoriel

$$\vec{F} = \frac{x^2-y^2}{2xy}\vec{i} + x^2yz\vec{j} + x^2y^2\vec{k},$$

et un point $P(1,2,1)$ dans l'espace à trois dimensions.
Calculez le gradient $\operatorname{grad} f$ de la fonction f au point P.
Calculez la divergence $\operatorname{div}\vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ au point P.
Calculez le rotationnel $\operatorname{rot}\vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ au point P. Déterminez la projection scalaire de ce vecteur $\operatorname{rot}\vec{F}$ sur le gradient de la fonction f au point P.

☆ **1.48.** Considérons une fonction f et un champ vectoriel $\vec{F}$, donnés par

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{1+z^2}, \qquad \vec{F} = xe^{yz}\vec{i} + ye^{zx}\vec{j} + ze^{xy}\vec{k},$$

le point $P(1,-1,1)$ et le vecteur $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ dans l'espace à trois dimensions.
Calculez le gradient $\operatorname{grad} f$ de la fonction f dans le point P.
Calculez la divergence $\operatorname{div}\vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ dans le point P.
Calculez le rotationnel $\operatorname{rot}\vec{F}$ du champ vectoriel dans le point P.
Calculez la dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction du vecteur $\vec{v}$ au point P.

◎ **1.49.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ du champ vectoriel $\vec{F} = 3y^2\vec{i} - \sqrt{x}\vec{j}$ le long de la parabole

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = t+3 \end{cases}$$

entre les points $M(4,2)$ et $N(4,4)$.

◎ **1.50.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ du champ vectoriel $\vec{F} = 3y^2\vec{i} - \sqrt{x}\vec{j}$ le long de la ligne droite du point $M(4,2)$ au point $N(4,4)$.

◎ **1.51.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ le long de la ligne droite du point $N(0,3)$ au point $M(3,0)$.

◎ **1.52.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ le long du cercle avec centre $O(0,0)$ du point $P(3,0)$ au point $Q(0,3)$.

◎ **1.53.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = xy\vec{i} + \sqrt{xy}\vec{j} - 3xz^2\vec{k}$ le long de la ligne droite du point $M(0,0,0)$ au point $N(2,8,3)$.

◎ **1.54.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C ((3xy + y)dx + (xy^2 - 1)dy)$ le long du rectangle avec sommets $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$ et $(1,2)$.

◎ **1.55.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C ((2y^2 + 2)dx + x^2y^3dy)$ le long du rectangle avec sommets $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$ et $(1,2)$.

◎ **1.56.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C ((y^2 + 1)dx + x^2y^2dy)$ le long de la courbe fermée C formée par la ligne droite de $O(0,0)$ à $A(3,0)$, l'arc de l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ entre $A(3,0)$ et $B(0,2)$ et la ligne droite de $B(0,2)$ à $O(0,0)$.

◎ **1.57.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C (-xy^2dx + 3x^2ydy)$ le long de la courbe fermée C formée par la ligne droite de $O(0,0)$ à $A(3,0)$, l'arc de l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ entre $A(3,0)$ et $B(0,2)$ et la ligne droite de $B(0,2)$ à $O(0,0)$.

◎ **1.58.** (Labo V4) Est-ce que les intégrales suivantes dépendent du chemin d'intégration suivi?

1. $\int (4(x^2+y)y^2dx - 3x^3ydy)$
2. $\int \frac{y^3}{\sqrt{x}}dx + 6y^2\sqrt{x}dy$
3. $\int (\sin x + 1)dx + (y-6)dy + z^3dz$

◎ **1.59.** (Labo V4) Est-ce que les champs vectoriels suivants sont conservatifs?

1. $\vec{F} = 3x^2y^2\vec{\imath} + x^3\vec{\jmath}$
2. $\vec{F} = 3x^2z^2\vec{\imath} + \ln y\vec{\jmath} + 2x^3z\vec{k}$
3. $\vec{F} = z\,\mathrm{tg}(xz)\vec{\imath} + x\,\mathrm{tg}(xz)\vec{k}$

☆ **1.60.** Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$.
Calculez le gradient $\vec{F} = \mathrm{grad}\, f$ de cette fonction.
Calculez l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe γ_1 formée par la droite de $A(0,0)$ à $B(1,1)$.
Calculez l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe $y = xe^{x-1}$ de $A(0,0)$ à $B(1,1)$.

☆ **1.61.** Calculez l'intégrale

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma \frac{1}{y}dx + xdy$$

du champ vectoriel $\vec{F} = \frac{1}{y}\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ le long de la courbe fermée γ (à travers les points A,B et C) formée par
Une droite du point $A(1,1)$ au point $B(1,5)$.
Une droite du point $B(1,5)$ au point $C(25,5)$.
La parabole $y = \sqrt{x}$ de C à A.

☆ **1.62.** Considérons le champ vectoriel $\vec{F} = (ye^x + e^y + 3x^2)\vec{i} + (e^x + xe^y + 2y)\vec{j}$.
Démontrez que ce champ vectoriel $\vec{F}$ est conservatif.
Déterminez le potentiel U de ce champ vectoriel.
Calculez l'intégrale curviligne $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ de ce champ vectoriel le long de la courbe γ comprenant la ligne droite γ_1 de $A(0,3)$ à $B(0,0)$ et la ligne droite γ_2 de $B(0,0)$ à $C(4,0)$.
Déterminez l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ de ce champ vectoriel le long de l'arc γ_3, formé par l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ de $A(0,3)$ à $C(4,0)$.

☆ **1.63.** Déterminez l'intégrale

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma (x\cos(x+y) + \sin(x+y))dx + x\cos(x+y)dy$$

du champ vectoriel

$$\vec{F} = (x\cos(x+y) + \sin(x+y))\vec{i} + x\cos(x+y)\vec{j}$$

le long de l'ellipse $\vec{r}(t) = (2 + 5\cos t)\vec{i} + (7 + 3\sin t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Oplossingen - Solutions

1.1.

1. $\sqrt{10}$
2. $\sqrt{17}$
3. $\sqrt{41}$
4. $4\sqrt{10}$
5. $11\vec{i} - 11\vec{j}$
6. $\sqrt{242}$
7. $\pm \frac{1}{\sqrt{17}}(-4\vec{i} + \vec{j})$
8. $\alpha = 1,602\pi$

1.2.

1. $\sqrt{2}, \quad \frac{7\pi}{4}$
2. $\sqrt{2}, \quad \frac{3\pi}{4}$
3. $2, \quad \frac{4\pi}{3}$

1.3.

1. $\vec{OP} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$,
2. $\vec{QR} = \vec{i} - 8\vec{j}$,
3. $\vec{RQ} = -\vec{i} + 8\vec{j}$,

1.4.

1. -14
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + \vec{j}, \theta = \frac{\pi}{4}$
3. $\pm (\frac{7}{\sqrt{373}}\vec{i} - \frac{18}{\sqrt{373}}\vec{j})$
4. $\theta = 0,891\pi$

1.5.

1. $-\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad -\frac{2}{5}\vec{i} - \frac{1}{5}\vec{j}$
2. $\frac{14}{\sqrt{10}}, \qquad \frac{7}{5}\vec{i} + \frac{21}{5}\vec{j}$

1.6.

1.7.

$$\begin{aligned} 1.\quad & a = -\frac{4}{3} \\ 2.\quad & a = 2 \\ 3.\quad & a = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

1.8.

$$2\vec{i} + \vec{j}, \qquad -\vec{i} + 2\vec{j}$$

1.9.

$$8, \qquad -14\vec{k}$$

1.10.

$$8, \quad 4$$

1.11.

1. 5
2. $\sqrt{5}$
3. $5\vec{i} + 5\vec{j}$
4. $\vec{i} + 3\vec{j}$
5. $12\vec{i} + 16\vec{j}$
6. $-4\vec{i} - 2\vec{j}$
7. $7\vec{i} + 6\vec{j}$
8. $-4\vec{i} - 7\vec{j}$
9. $17\vec{i} + 16\vec{j}|$
10. $5\sqrt{2}$
11. $5\sqrt{37} = 30,4$
12. $5\sqrt{2} - 5 = 2,1$
13. 10
14. 30

1.12.

$$26^\circ 34'$$

1.13.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

1.14.

$$2\sqrt{5}, \quad 4\vec{i} + 2\vec{j}, \quad 2, \quad \frac{6}{5}\vec{i} + \frac{8}{5}\vec{j}$$

1.15.

1. $5\sqrt{2}$
2. 3
3. $5\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$
4. $\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$
5. $12\vec{i} + 16\vec{j} + 20\vec{k}$
6. $-4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$
7. $7\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$
8. $-4\vec{i} - 9\vec{j} - 12\vec{k}$
9. $17\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$
10. $\sqrt{915} = 30,2$
11. $\sqrt{705} = 26,6$
12. $\sqrt{43} - 5\sqrt{2} = -0,5$
13. -8
14. 59

1.16.

$$b_x = \frac{29}{2}, \qquad b_z = -\frac{51}{2}, \qquad c_y = -9$$

1.17.

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

1.18.

1. 2
2. $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
3. $\vec{w}$
4. -4

1.19.

$$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \qquad x + 4 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$$

1.20.

$$\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

1.21.

$$-14x - 26y + 8z = 72$$

1.22.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{5}$$

1.23.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}, \quad z=2$$

1.24.

$$1$$

1.25.

$$5x+y-2z=16$$

1.26.

$$112°9^{'}$$

1.27.

$$-\frac{8}{3}, \quad ,-\frac{16}{9}\vec{i}+\frac{8}{9}\vec{j}+\frac{16}{9}\vec{k},-\frac{4\sqrt{2}}{5}, \quad ,-\frac{12}{25}\vec{i}-\frac{16}{25}\vec{j}-\frac{4}{5}\vec{k},$$

1.28.

1. -8
2. 11
3. -21
4. $-3\vec{i}+16\vec{j}-11\vec{k}$
5. $-11\vec{i}+17\vec{j}-7\vec{k}$
6. $2\vec{i}+6\vec{j}-1\vec{k}$
7. 25
8. -25
9. -25
10. $-34\vec{i}+13\vec{j}+10\vec{k}$
11. $-75\vec{i}-23\vec{j}-13\vec{k}$
12. 382
13. $8\vec{i}-1\vec{j}-4\vec{k}$

1.29.

$$3\sqrt{51}=21,4, \qquad 25$$

1.30.

$$-\frac{10}{59}\vec{i}+\frac{70}{59}\vec{j}-\frac{30}{59}\vec{k}$$

1.31.

$$p_s=6,\quad p_v=\frac{18}{5}\vec{i}+\frac{24}{5}\vec{j},\quad \theta=54°55',\quad \vec{n}=-\frac{32\sqrt{73}}{365}\vec{i}+\frac{24\sqrt{73}}{365}\vec{j}+\frac{3\sqrt{73}}{73}\vec{k}$$

1.32.

$$\begin{aligned}&3x+5y-z=0,\\&y+5z=4,\\&x=2, 5y-z=-6,\\&\sqrt{35}\end{aligned}$$

1.33. De punten P, Q en R zijn collineair, er zijn daarom veel oplossingen voor de eerste vraag mogelijk. Elk vierde punt S in de ruimte (niet op de rechte door de drie punten gelegen), of elke vector $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{PQ}$ levert een mogelijke oplossing.
Les points P, Q et R se trouvent sur une droite, on a donc plusieurs solutions pour la première question. Un quatrième point S (qui n'est pas situé sur la droite à travers les trois points), ou un vecteur $\vec{n}$ qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{PQ}$, nous donne une solution possible.

$$\begin{aligned}&\alpha x+3\beta y+\beta z=\alpha+5\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\\&y-3z=5\\&x=1,\quad 3y+z=5\\&0\end{aligned}$$

1.34.

$$\begin{aligned}&29x-y+11z=0\\&S(1,18,-1)\\&\frac{x-1}{29}=\frac{y-18}{-1}=\frac{z+1}{11}\\&\frac{9\sqrt{107}}{2}\end{aligned}$$

1.35.

$$\begin{aligned}&\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j},\quad \vec{a}=2\vec{i}+12\vec{j},\\&\vec{a}_t=\frac{162}{25}\vec{i}+\frac{216}{25}\vec{j},\quad \vec{a}_n=-\frac{112}{25}\vec{i}+\frac{84}{25}\vec{j}\end{aligned}$$

1.36.

$$x - 22y - 17z = 0$$
$$S(4, -6, 8)$$
$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+6}{-22} = \frac{z-8}{-17}$$
$$\frac{3\sqrt{86}}{2}$$

1.37.

$$\frac{e^3}{2}(2+\sqrt{3})$$

1.38.

$$-\frac{1}{4\sqrt{13}}$$

1.39.

$$-6\vec{i} - 2\vec{j}$$

1.40.

1.41.

$$2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$$

1.42.

$$y - 2xy, \qquad 4xy\vec{i} - 2y^2\vec{j} - (x+y^2)\vec{k}$$

1.43.

$$-6\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \qquad 2, \qquad -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

1.44.

1.45.

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f)(P) &= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}, \\
\operatorname{div}(F)(P) &= \frac{e^2+2}{e}, \\
\operatorname{rot}(F)(P) &= -\frac{e^2+1}{e}\vec{i} + \frac{e^2+1}{e}\vec{j}, \\
D_{\vec{v}}(f)(P) &= \frac{\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$

1.46.

$$-\frac{32\sqrt{35}e^{-4}}{35}$$

1.47.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(f)(P) = \frac{5}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}, \\
&\operatorname{div}(F)(P) = \frac{9}{4}, \\
&\operatorname{rot}(F)(P) = 2\vec{i} - 8\vec{j} + \frac{37}{8}\vec{k}, \\
&\frac{447\sqrt{2}}{80}
\end{aligned}$$

1.48.

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f)(P) &= -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}, \\
\operatorname{div}(\vec{F})(P) &= \frac{e^2+2}{e}, \\
\operatorname{rot}(\vec{F})(P) &= \frac{e^2+1}{e}\vec{i} - \frac{e^2+1}{e}\vec{k}, \\
D_{\vec{v}}(f)(P) &= \frac{3\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}$$

1.49.

1.50.

$$-4$$

1.51.

$$9$$

1.52.

$$\frac{-9\pi}{2}$$

1.53.

$$-\frac{83}{6}$$

1.54.

$$-\frac{28}{3}$$

1.55.

$$18$$

1.56.

$$\frac{8}{15}$$

1.57.

$$36$$

1.58.

1. ja/oui
2. neen/non
3. neen/non

1.59.

1. neen/non
2. ja/oui
3. ja/oui

1.60.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(f) = (2x+2y)\vec{i} + (2x+6y)\vec{j},\\
&\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6,\\
&\int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6
\end{aligned}$$

1.61.

$$\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 4 + \frac{24}{5} - 8 - \frac{124}{3} = -40,5$$

1.62.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0\\
&f = ye^x + xe^y + x^3 + y^2,\\
&\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -12 + 68 = 56,\\
&\int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 56
\end{aligned}$$

1.63.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$