Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Onderwijseenheid 5
Exacte Wetenschappen en Informatica

Calcul vectoriel

Peter Bueken

HZS-OE5-NW142
Premier Bachelor Sciences Nautiques
Version 0.12
20 Avril 2008

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Calcul vectoriel

1. Introduction

Pour la description de certains phénomènes en, par exemple, la mécanique et la physique, les variables *scalaires*, représentées par une valeur réelle et une unité (comme, par exemple, la distance, température, pression) ne suffisent pas. En effet, il est souvent nécessaire de décrire un phénomène à l'aide d'une variable *vectorielle*, qui est déterminée par sa *taille*, une *direction* et un *sens*, et dans certains cas même un *point initial*. Quelques exemples de variables vectorielles sont la vélocité et l'accélération d'un point, la force exercée sur une masse, un déplacement exécutée par une masse.

2. Vecteurs dans le plan et dans l'espace

1. Définitions

Un *vecteur (lié)* dans le plan ou dans l'espace (de dimension trois) consiste d'une paire de points A et B dans le plan ou dans l'espace, dans un ordre prescrit. Un vecteur lié correspond donc avec un couple de points (A, B) dans l'espace considérée. Les points A et B seront appelés le point initial et le point final (ou point terminal) du vecteur, et on dénote ce vecteur par $\vec{AB}$. Pour la représentation graphique du vecteur $\vec{AB}$, on utilise une flèche du point A au point B.

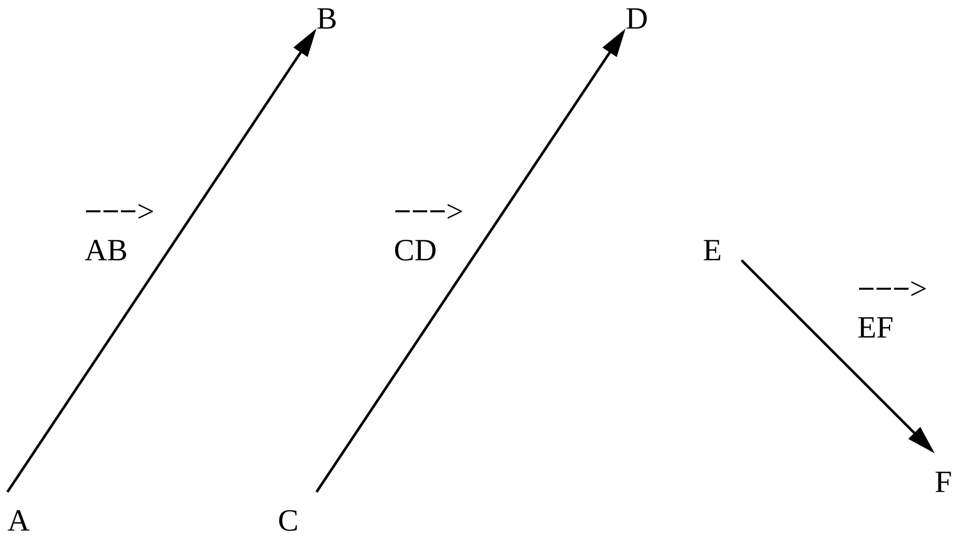

Figure 1. *Quelques vecteurs liés*

Pour un vecteur lié, le point initial et le point final jouent un rôle important. On considère deux vecteurs liés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ comme différents quand leur points initiaux ou leur point finaux sont différents, c'est-à-dire,

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow A = C \text{ et } B = D.$$

Pour certaines applications, le point initial d'un vecteur n'est pas important, et le vecteur sera seulement utilisé pour indiquer une direction, un sens, et une taille. Deux vecteurs liés avec la même taille, direction et sens, mais avec un point initial différent, seront considérés comme représentants de la même quantité vectorielle, qu'on appelle un *vecteur (libre)*. Deux vecteurs liés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ représentent le même vecteur libre si les couples de points (A, B) et (C, D) sont "équipollents", c'est-à-dire qu'il existe une translation (déplacement) T de l'espace qui relie les points initiaux et finaux des vecteurs,

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow T(A) = C \text{ et } T(B) = D.$$

Les points A, B, C, D forment alors un parallélogramme, ou les couples de points peuvent être reliés par une paire de parallélogrammes (dans le cas de points colinéaires). Un vecteur libre correspond donc à une classe d'équivalence de couples équipollents, ou des vecteurs liés correspondants. On dénotera souvent les vecteurs libres par les symboles $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ Dans la suite de ce chapitre, on se concentrera surtout sur l'étude des vecteurs libres, qu'on appelle "vecteurs".

Le *module* ou la longueur $|\vec{AB}|$ d'un vecteur lié $\vec{AB}$ est la distance entre le point initial A et le point final B du vecteur (ou la longueur de la flèche qui forme la représentation graphique du vecteur). On appelle *module* $|\vec{v}|$ du vecteur libre $\vec{v}$ le module d'un représentant arbitraire $\vec{AB}$ de ce vecteur libre.

Un *vecteur unitaire* est un vecteur dont le module est égal à 1. Le *vecteur zéro* $\vec{0}$ est le vecteur libre qui correspond aux vecteurs liés dont les points initiaux et finaux sont les mêmes, $\vec{AA}$. Le module du vecteur zéro est évidemment égal à 0.

Le *vecteur opposé* d'un vecteur lié $\vec{AB}$ est le vecteur $\vec{BA}$. Le vecteur libre correspondant au vecteur opposé $\vec{BA}$ d'un représentant arbitraire $\vec{AB}$ du vecteur libre $\vec{v}$ est appelé le vecteur opposé de $\vec{v}$, et on le dénote par $-\vec{v}$. Le vecteur opposé $-\vec{v}$ a la même direction et taille que le vecteur $\vec{v}$, mais son sens est opposé à celui de $\vec{v}$.

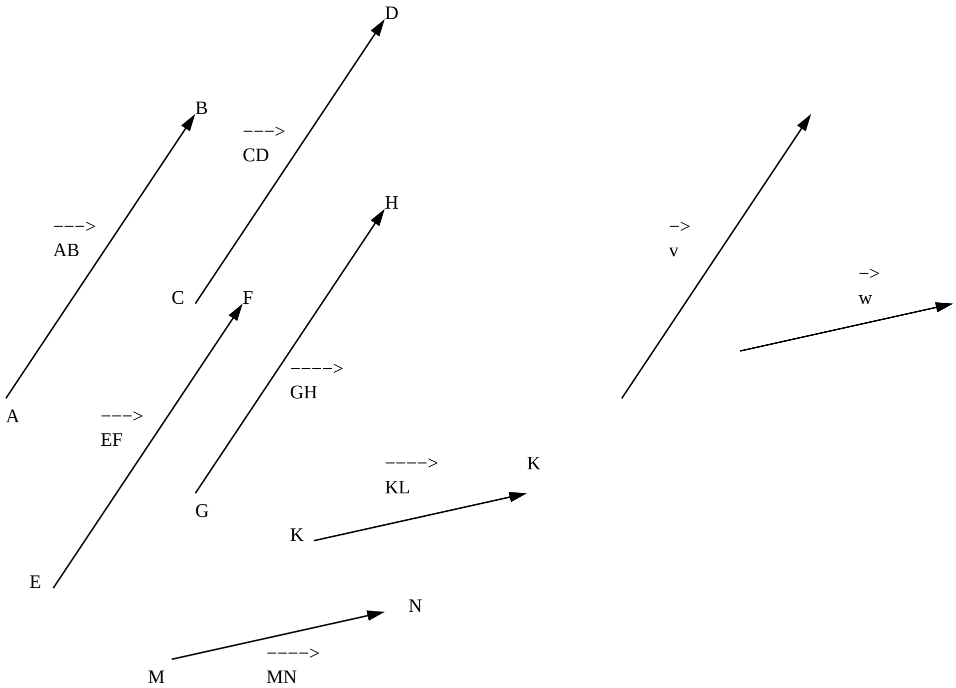

Figure 2. *Vecteurs libres avec quelques représentants*

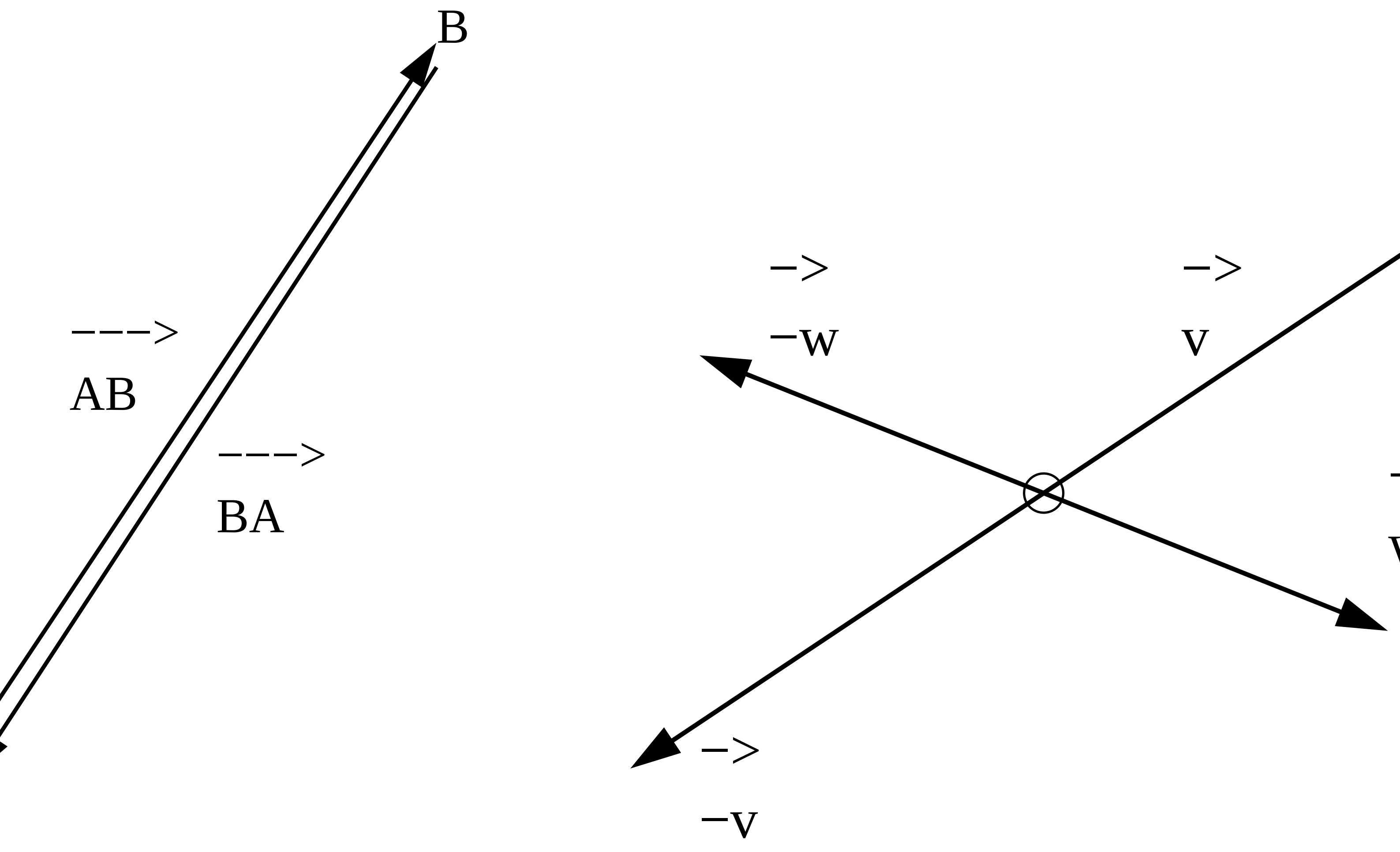

Figure 3. *Vecteurs opposés*

2. Multiple scalaire d'un vecteur

Considérons un vecteur libre $\vec{a}$ et un nombre réel k. On définit alors le *multiple scalaire* $k \cdot \vec{a}$ comme un vecteur ayant la même direction que $\vec{a}$, dont le module est donné par

$$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

Le sens de $k \cdot \vec{a}$ et $\vec{a}$ sont identiques (resp. opposés) quand k est positif (resp. négatif).

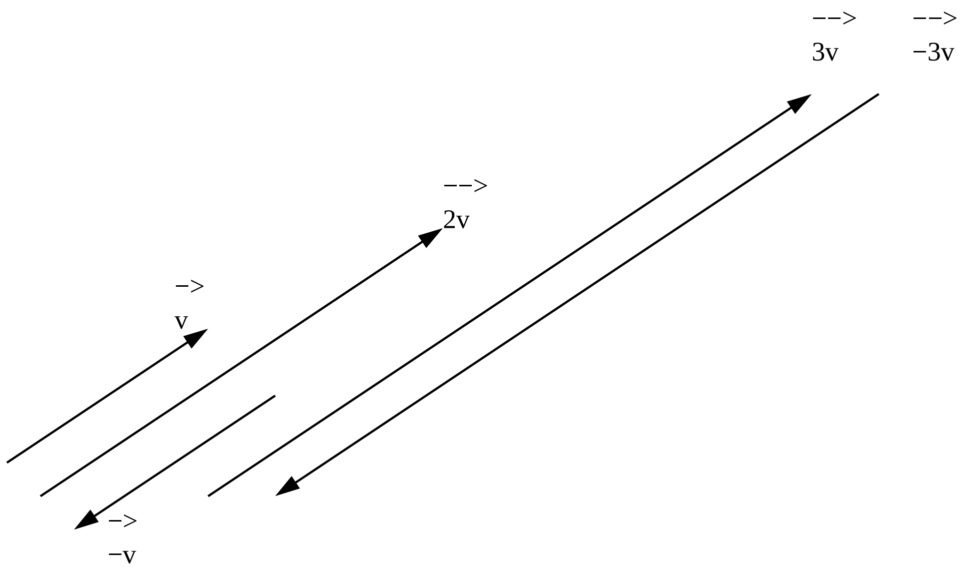

Figure 4. *Vecteur libre avec quelques multiples scalaires*

Considérons maintenant un vecteur $\vec{a}$ différent du vecteur zéro. Il est alors clair que le vecteur

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

est un vecteur unitaire dans la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{a}$. La construction d'un vecteur unitaire dans le sens et la direction d'un vecteur donné $\vec{v}$ est appelé la *normalisation* du vecteur $\vec{v}$.

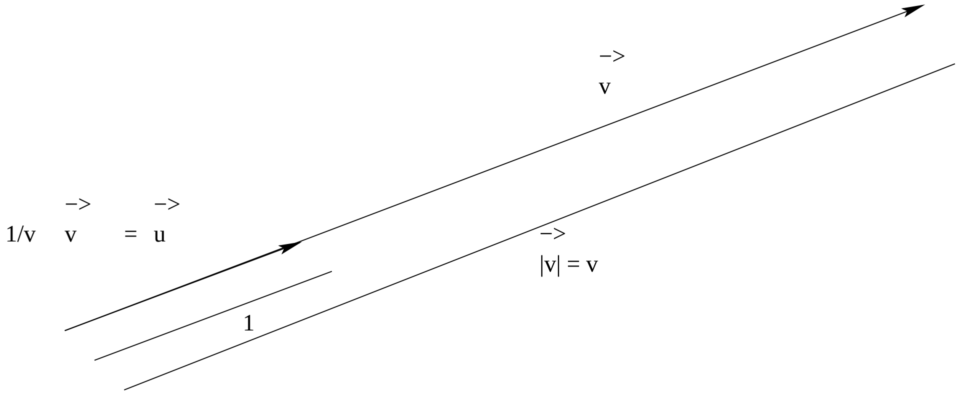

Figure 5. *Normalisation d'un vecteur libre*

3. Somme et différence de vecteurs libres

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, correspondant aux vecteurs liés $\vec{OA}$ et $\vec{AB}$. On définit alors la somme (ou la résultante) $\vec{a}+\vec{b}$ des vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme le vecteur libre correspondant au vecteur lié $\vec{OB}$.

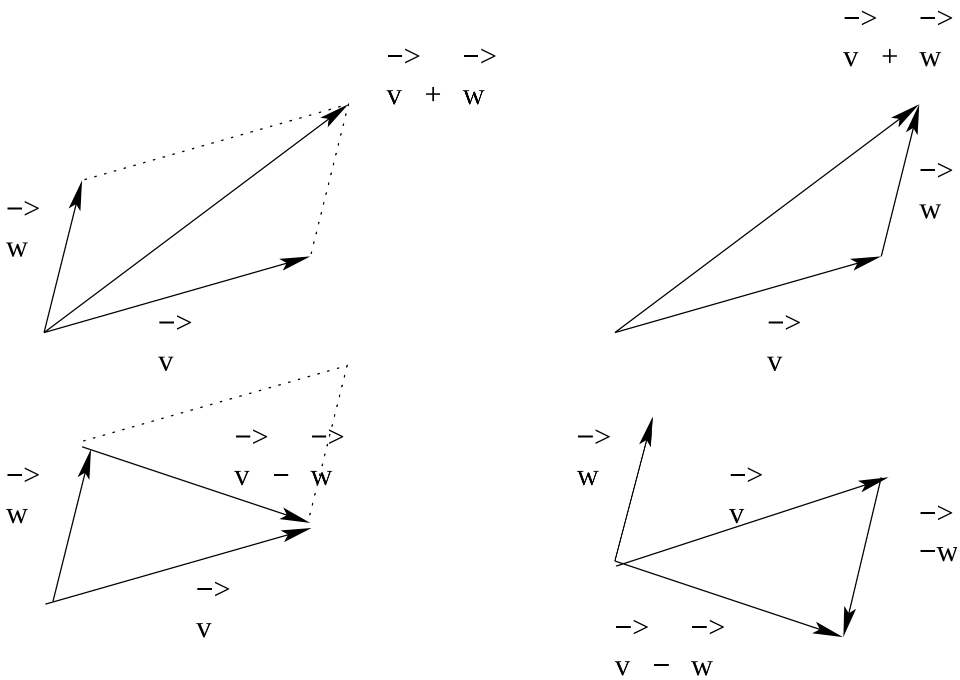

Figure 6. *Somme et différence de vecteurs libres*

Une méthode alternative pour la construction de la somme est la méthode du parallélogramme. Si A et B sont les points finaux des vecteurs liés $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ qui représentent les vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la somme $\vec{a}+\vec{b}$ de ces vecteurs libres est représentée par le vecteur lié $\vec{OC}$, où C est le quatrième sommet d'un parallélogramme formé par les points O, A et B.

La différence de deux vecteurs libres$\vec{a}$ et $\vec{b}$ est définie comme une somme

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

du vecteur $\vec{a}$ et du vecteur opposé de $\vec{b}$.

4. Composantes d'un vecteur libre

En choisissant, pour un vecteur libre donné, un vecteur lié (le représentant) avec un point initial fixe O, on constate que l'ensemble des vecteurs libres correspond à l'ensemble de vecteurs liés $\vec{OV}$, correspondant à son tour avec l'ensemble des point dans l'espace considéré (les points finaux des vecteurs $\vec{OV}$).

Considérons maintenant l'ensemble des vecteurs libres dans le plan, et choisissons un système de coordonnées Oxy, formé par deux axes perpendiculaires x et y à travers le point O, sur lesquels on indique une unité. Un vecteur libre $\vec{v}$ correspond alors avec le point final V du vecteur lié $\vec{OV}$. Les coordonnées (v_x, v_y) du point V sont appelées les *composantes* ou les *coordonnées* du vecteur libre $\vec{v}$. On conclut que les vecteurs libres dans le plan peuvent être représentés comme des paires de nombres réels, $\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y)$.

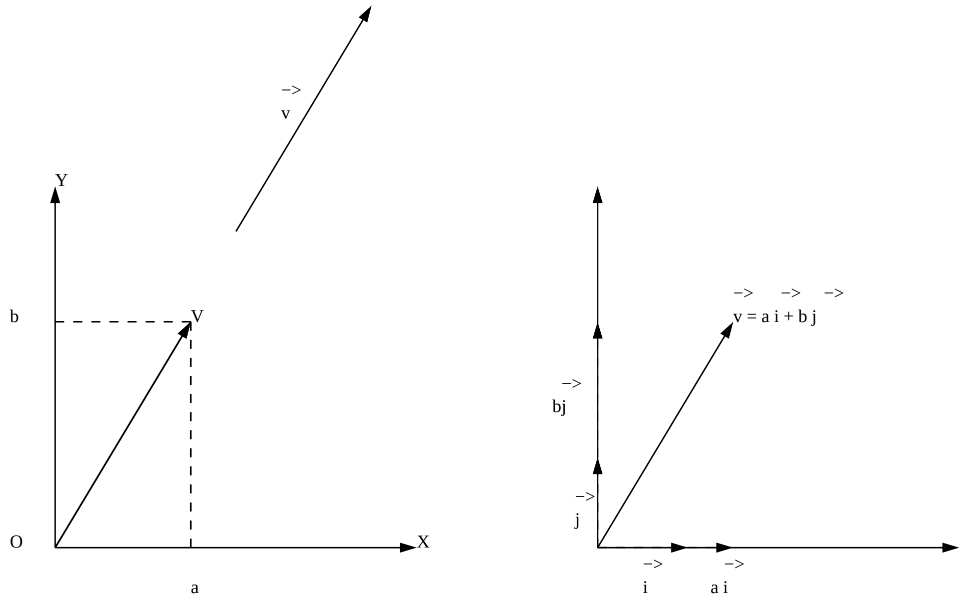

Figure 7. *Composantes d'un vecteur dans le plan*

De la même façon on construit, dans l'espace de dimension trois, un système de coordonnées $Oxyz$, formé par trois axes mutuellement perpendiculaires x, y et z à travers le point O, munis avec une unité. Pour des raisons pratiques, on choisira toujours un système *positif* ou *direct*, c'est à dire que l'orientation de l'axe z sera choisie telle que les trois axes x, y et z correspondent au pouce, index et majeur de la main droite. Un vecteur libre $\vec{v}$ correspond maintenant à un triplet de valeurs réelles, $\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y, v_z)$, les coordonnées du point terminal V du vecteur lié $\vec{OV}$ représentant le vecteur libre $\vec{v}$. Ces nombres réels sont appelés les *composantes* ou *coordonnées* du vecteur $\vec{v}$.

Considérons maintenant deux points A et B dans le plan ou dans l'espace, dont les coordonnées sont données par

$$A(a_x, a_y, a_z), \qquad B(b_x, b_y, b_z).$$

On montre alors que les composantes du vecteur libre $\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA}$, qui est représenté par le vecteur lié $\vec{AB}$, sont données par

$$(b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z).$$

Le module d'un vecteur $\vec{v}$ dont les composantes sont (v_x, v_y) est donné par

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

et pour un vecteur dont les composantes sont (v_x, v_y, v_z), il est donné par

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Les composantes du vecteur zéro sont $(0, 0)$ ou $(0, 0, 0)$.

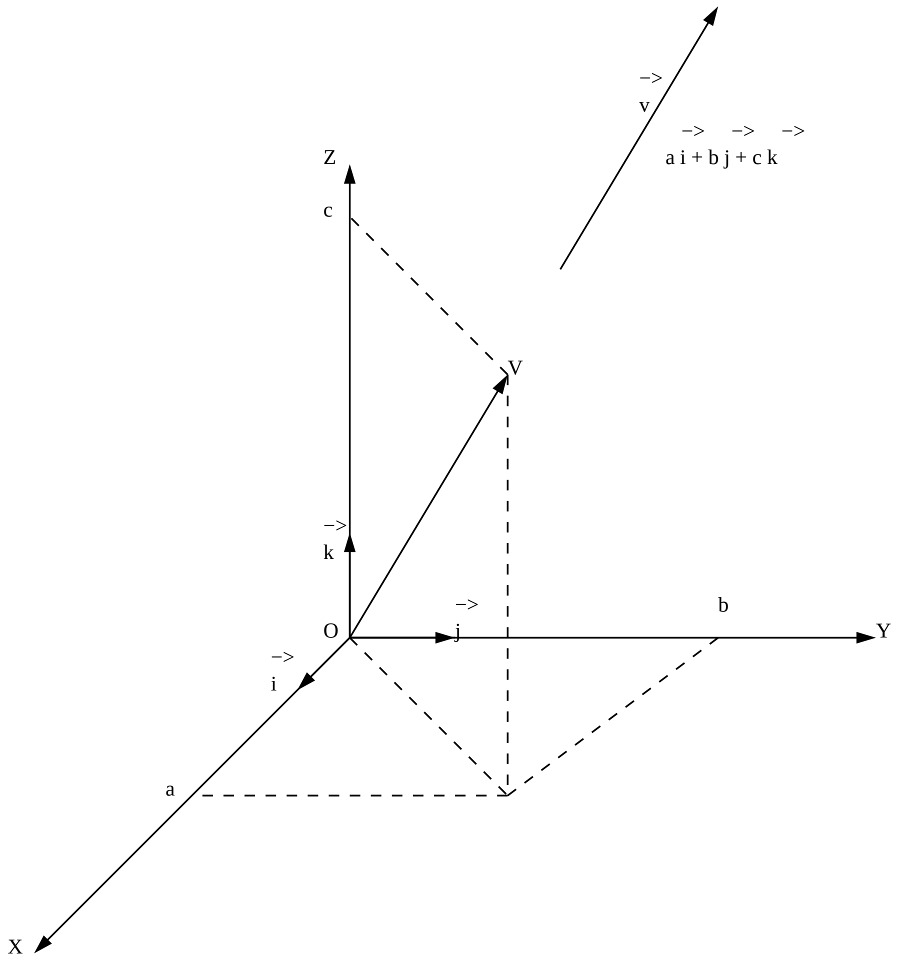

Figure 8. *Composantes d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions*

Si les composantes du vecteur $\vec{a}$ sont (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)), les composantes du vecteur $k \cdot \vec{a}$ sont données par (ka_x, ka_y) (resp. (ka_x, ka_y, ka_z)). Les composantes du vecteur opposé $-\vec{a}$ du vecteur libre $\vec{a}$ seront, par conséquent, données par $(-a_x, -a_y)$ (resp. $(-a_x, -a_y, -a_z)$).

Considérons maintenant deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dont les composantes sont (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) et (b_x, b_y) (resp. (b_x, b_y, b_z)). Les composantes de la somme sont alors données par

$$(a_x + b_x, a_y + b_y) \text{ resp. } (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

et la différence est déterminée par les composantes

$$(a_x - b_x, a_y - b_y) \text{ resp. } (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

Dans la suite de ce chapitre, on dénote par le symbole $\vec{i}$ le vecteur unitaire dans la direction de l'axe x, et pointant dans le sens positif, c'est-à-dire le vecteur libre dont les composantes sont données par $(1, 0)$ (ou $(1, 0, 0)$ pour les vecteurs dans l'espace). De la même façon, le vecteur $\vec{j}$ est un vecteur dont les composantes sont $(0, 1)$ (ou $(0, 1, 0)$), donc un vecteur unitaire dans la direction et le sens positif de l'axe y, et le symbole $\vec{k}$ dénote le vecteur unitaire correspondant à l'axe z, dont les composantes sont $(0, 0, 1)$. On montre alors facilement qu'un vecteur arbitraire $\vec{a}$ avec composantes (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) peut être décomposé comme une somme

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \text{ resp. } \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

5. Produit scalaire

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On définit le *produit scalaire* de ces vecteurs comme

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

où φ représente l'angle entre les deux vecteurs.

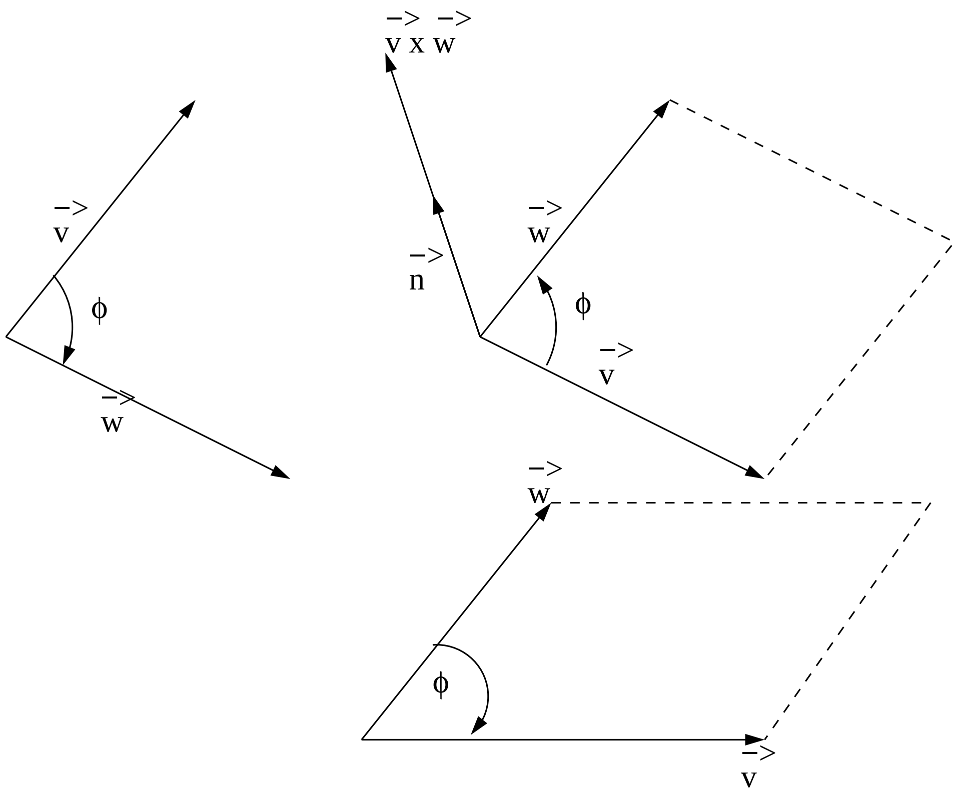

Figure 9.

Il est claire que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

et il suit de la définition que

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2.$$

Il est également facile à montrer que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si et seulement si $\vec{a} = 0$ ou $\vec{b} = 0$ ou $\vec{a} \perp \vec{b}$. On montre, en plus, que

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \qquad (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

On conclut que, pour les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ (et $\vec{k}$) introduits ci-dessus,

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0;$$

Par conséquent, le produit scalaire de deux vecteurs dont les composantes sont (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) et (b_x, b_y) (resp. (b_x, b_y, b_z)) est donné par

$$a_x b_x + a_y b_y (\text{resp. } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Par définition,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

et il en suit que l'angle φ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut être calculé à l'aide de la formule

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Considérons maintenant un vecteur $\vec{a}$ dans le plan, dont les composantes sont (a_x, a_y). L'angle formé par le vecteur $\vec{a}$ et l'axe (positif) x est alors donné par

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}},$$

et l'angle entre ce vecteur et l'axe (positif) y est déterminé par

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}.$$

Les angles entre un vecteur $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ dans l'espace et les trois axes du système de coordonnées sont donnés par les trois nombres

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

qu'on appelle les *cosinus directeurs* du vecteur $\vec{a}$. Il suit directement que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

6. Projection scalaire et vectorielle

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On peut alors construire la projection perpendiculaire du vecteur $\vec{a}$ sur la direction donnée par le vecteur $\vec{b}$, c'est-à-dire qu'on décompose $\vec{a}$ comme une somme

$$\vec{a} = \vec{t} + \vec{n},$$

où le vecteur $\vec{t} = k\vec{b}$ est parallèle au vecteur $\vec{b}$ et $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$. Le vecteur $\vec{t}$ est appelé la *projection vectorielle* de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$. On definit la *projection scalaire* du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur $\vec{b}$ comme le nombre $k|\vec{b}|$, c'est-à-dire, le module du vecteur $\vec{t}$, muni d'un signe: la projection scalaire est positive si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ ont le même sens, négative si les deux vecteurs ont un sens opposé.

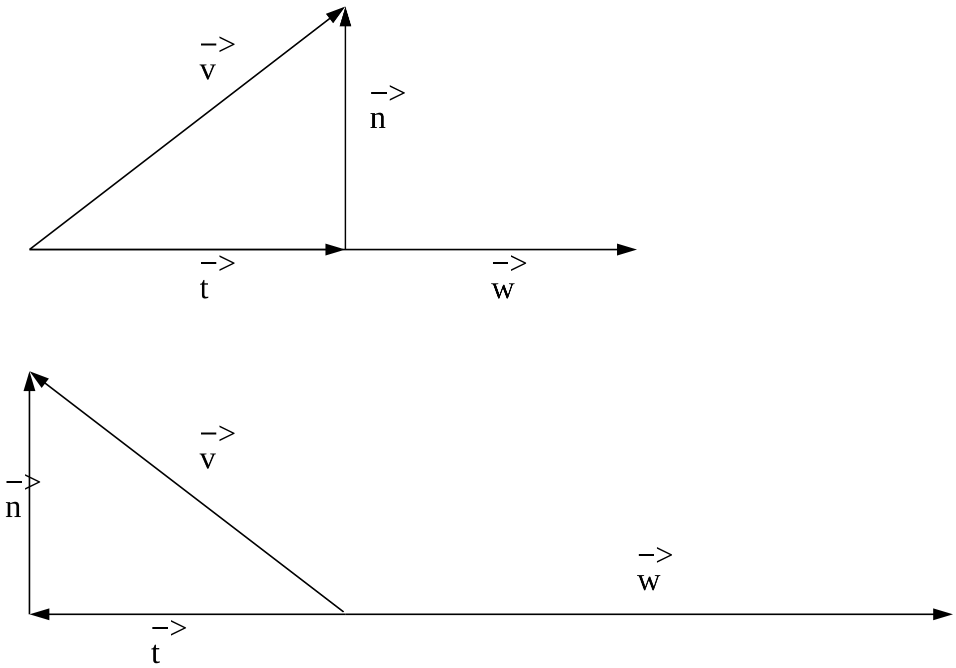

Figure 10.

On détermine la projection scalaire de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ comme

$$|\vec{a}|\cos\varphi = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

la projection vectorielle est alors donnée par

$$\vec{t} = |\vec{a}|\cos\varphi\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}.$$

7. Produit vectoriel et produit triple

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, linéairement indépendants, dans l'espace de dimension trois. On construit alors un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dont le sens est choisi tel que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{n}$ forment un système d'axes (un trièdre) positif (règle de la main droite). On définit alors le *produit vectoriel* $\vec{a}\times\vec{b}$ comme le vecteur

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\varphi|\cdot\vec{n},$$

où φ est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

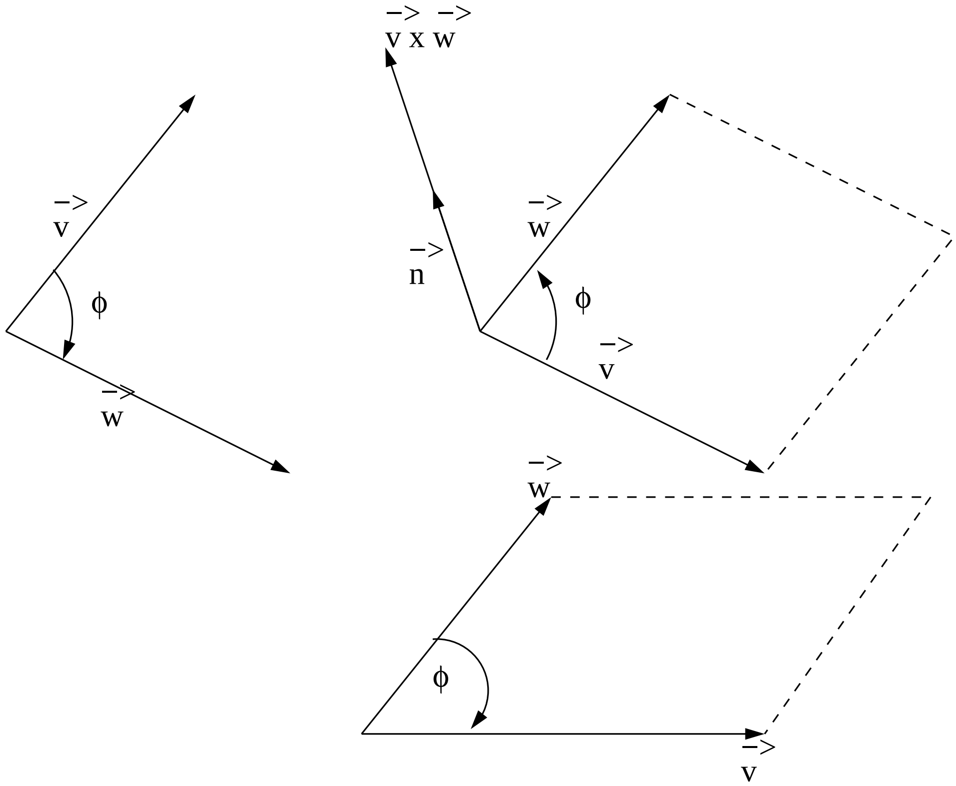

Figure 11.

Il suit immédiatement de la définition que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

et que

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

si et seulement si $\vec{a} = 0$ ou $\vec{b} = 0$ ou $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Il est également facile à montrer que

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\varphi|$$

est égal à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on peut montrer que

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \qquad \vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

La définition (et notre choix d'un système de coordonnées positif) nous montre alors que, pour les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, on a

$$\begin{aligned}
&\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,\\
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\\
&\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},
\end{aligned}$$

et le produit vectoriel de deux vecteurs aux composantes (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) est, par conséquent, donné par

$$(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Ce produit peut également être déterminé comme un déterminant (formel)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Considérons maintenant trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dans l'espace de dimension trois. On définit le *produit triple* des trois vecteurs comme le nombre réel

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Un calcul simple nous montre que, si les composantes des vecteurs sont (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z) et (c_x, c_y, c_z), ce produit triple correspond au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

La valeur absolue du produit triple nous donne le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, le signe indiquant l'orientation du trièdre (positif ou négatif).

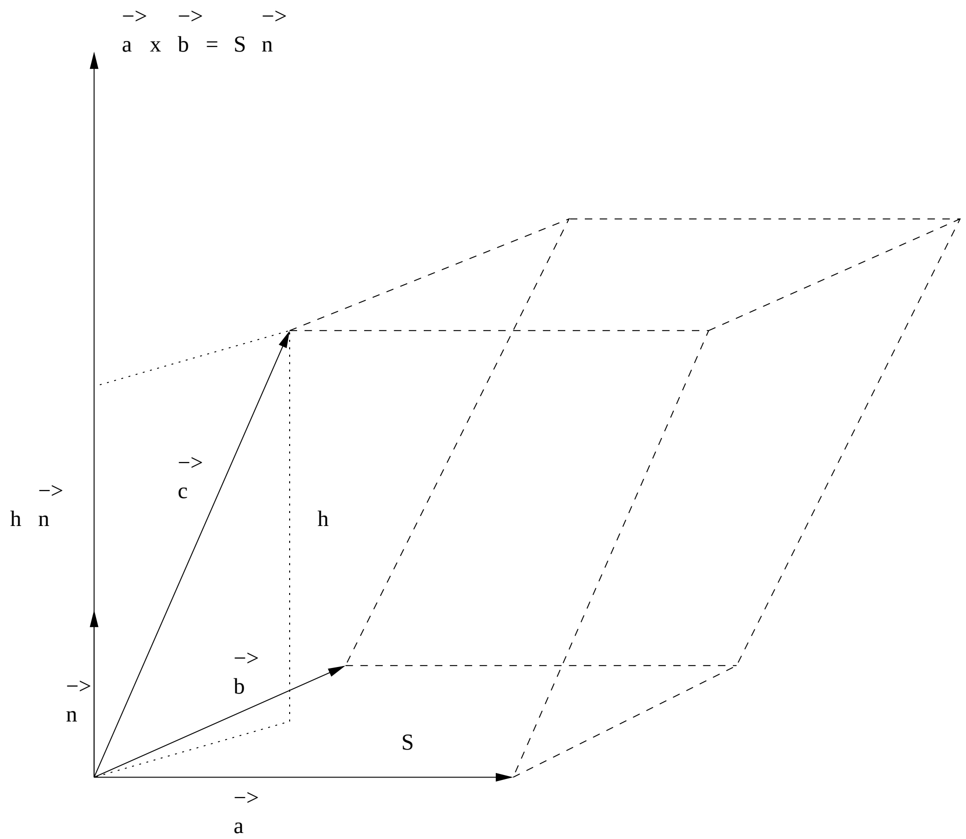

Figure 12.

3. Equation d'une droite et d'un plan

1. Equation d'une droite

Une droite dans l'espace de dimension trois est complètement déterminée par un point P_0 (coordonnées (x_0, y_y, z_0)) et sa direction, représentée par un vecteur libre (un vecteur directeur) $\vec{a} \neq 0$ (composantes (a, b, c)). Un point P (avec coordonnées (x, y, z)) appartient à la droite si et seulement si le vecteur $\vec{P_0P}$ a la même direction que le vecteur directeur $\vec{a}$, donc

$$\vec{P_0P} = k \cdot \vec{a}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Les composantes du vecteur $\vec{P_0P}$ sont données par $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, et on en dérive l'équation paramétrique de la droite,

$$\begin{cases} x = x_0 + ka, \\ y = y_0 + kb, \\ z = z_0 + kc. \end{cases}$$

Cette équation donne, pour chaque valeur $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées d'un point P sur la droite. En éliminant le paramètre k de ces équations, on obtient l'équation de la droite, c'est-à-dire la condition qui doit être satisfaite par les coordonnées du point P pour qu'il appartienne à la droite. Si toutes les composantes du vecteur directeur $\vec{a}$ (les nombres directeurs de la droite) diffèrent de 0, on obtient l'équation

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Dans le cas où une des composantes du vecteur directeur $\vec{a}$ s'annulle, par exemple $a = 0$, l'équation paramétrique nous donne

$$x = x_0, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

si deux composantes de ce vecteur s'annullent, par exemple $a = b = 0$, on trouve l'équation

$$x = x_0, \qquad y = y_0.$$

2. Equation d'un plan

Un plan dans l'espace de dimension trois est complètement déterminé par un point P_0 avec coordonnées (x_0, y_0, z_0) et la direction perpendiculaire au plan, appelée direction normale. La direction normale est donnée par un vecteur libre $\vec{n} \neq 0$ avec composantes (n_1, n_2, n_3).

Un point P appartient au plan si le vecteur $\vec{P_0P}$, représentant une direction dans le plan, est perpendiculaire à la direction normale, donc

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n}, \qquad \vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$

Les composantes du vecteur $\vec{P_0P}$ étant données par $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, on obtient une équation de la forme

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

L'équation du plan peut donc être écrite sous la forme

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d, \qquad d = \vec{n} \cdot \vec{OP_0} = n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0.$$

Le plan peut également être fixé à l'aide d'un P_0 et deux vecteurs directeurs (linéairement indépendants) dans le plan, $\vec{r}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{r}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Un point P appartient alors au plan si le vecteur $\vec{P_0P}$ est une combinaison linéaire des vecteurs directeurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$,

$$\vec{P_0P} = k_1 \vec{r}_1 + k_2 \vec{r}_2, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

ce qui nous permet d'obtenir l'équation paramétrique du plan,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2, \\ y &= y_0 + k_1 b_1 + k_2 b_2, \\ z &= z_0 + k_1 c_1 + k_2 c_2, \end{aligned}$$

L'équation du plan est alors obtenue par l'élimination des paramètres k_1 et k_2, et elle est donnée par la condition (sur le déterminant d'une matrice)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Le produit vectoriel $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ est un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs directeurs, et donc perpendiculaire au plan. Par conséquent, ce produit vectoriel nous donne un vecteur normale, et on obtient l'équation du plan en exigeant que

$$\vec{P_0P} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = 0.$$

La définition du produit triple nous donne alors directement l'équation du plan sous la forme introduite ci-dessus.

4. Fonctions vectorielles

1. Introduction

Définition 1. *Une fonction vectorielle est une fonction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels dans l'espace V des vecteurs dans le plan ou dans l'espace de dimension trois, qui associe donc à chaque nombre réel $t \in \mathbb{R}$ (au maximum) un vecteur,*

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to V : t \mapsto \vec{r}(t).$$

En décomposant le vecteur $\vec{r}(t)$ comme une somme

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{i} + b(t)\vec{j}, \qquad \vec{r}(t) = a(t)\vec{i} + b(t)\vec{j} + c(t)\vec{k},$$

on peut considérer cette fonction comme une fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a(t), b(t)), \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (a(t), b(t), c(t)),$$

qui associe à chaque $t \in \mathbb{R}$ les composantes du vecteur.

Si on représente le vecteur $\vec{r}(t)$ comme un vecteur lié $\vec{OV}$ dont le point initial est un point fixe O, le point terminal V des vecteurs décrit une courbe C dans le plan ou dans l'espace. Cette courbe sera considérée comme la représentation graphique de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$.

Exemple 1. La fonction vectorielle

$$r(t) = (R\cos(t), R\sin(t)),$$

décrit le cercle de rayon R, centré à l'origine, et la fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = (A\cos(t) + a, B\sin(t) + b),$$

décrit une ellipse dont les demi-axes ont longueur A et B, le centre étant situé au point (a, b).

Exemple 2. La fonction

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t),$$

décrit une hélice circulaire autour de l'axe z, et on a déjà montré que

$$\vec{r}(t) = (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$$

donne une droite à travers le point (x_0, y_0, z_0) avec vecteur directeur (a, b, c).

2. Dérivée d'une fonction vectorielle

Considérons une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$. La *dérivée* de cette fonction au point t est alors définie comme le vecteur

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta) - \vec{r}(t)}{\Delta},$$

à condition que cette limite existe. On dénotera la dérivée par $\vec{r}'(t)$. Comme la construction nous donne, pour chaque valeur $t \in \mathbb{R}$, (au maximum) un vecteur, on obtient une nouvelle fonction vectorielle,

$$\vec{r}' : \mathbb{R} \to V : t \mapsto \vec{r}'(t),$$

qui sera appelée la *fonction dérivée* de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$.

Si la fonction vectorielle est représentée par ses composantes,

$$\vec{r}(t) = (a(t), b(t)), \qquad \vec{r}(t) = (a(t), b(t), c(t)),$$

il est facile à montrer que, en composantes, la fonction dérivée $\vec{r}'(t)$ prend la forme

$$\vec{r}'(t) = (a'(t), b'(t)), \qquad \vec{r}'(t) = (a'(t), b'(t), c'(t)).$$

La fonction dérivée $\vec{r}'(t)$ d'une fonction vectorielle étant de nouveau une fonction vectorielle, on peut définir la *dérivée d'ordre deux* $\vec{r}''(t)$ de la fonction $\vec{r}(t)$ comme

$$\vec{r}'' = (\vec{r}')'.$$

Exemple 3. La fonction dérivée de la fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t),$$

est la fonction vectorielle

$$\vec{r}'(t) = (-R\sin t, R\cos t),$$

la dérivée d'ordre deux est alors donnée par

$$\vec{r}''(r) = (-R\cos t, -R\sin t).$$

Exemple 4. La dérivée de la fonction

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, t),$$

est donnée par

$$\vec{r}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 1),$$

la dérivée d'ordre deux étant

$$\vec{r}''(t) = (-R\cos t, -R\sin t, 0).$$

Les fonctions dérivées d'ordre un et d'ordre deux de la fonction

$$\vec{r}(t) = (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0),$$

sont données par

$$\vec{r}'(t) = (a, b, c), \qquad \vec{r}''(t) = (0, 0, 0).$$

Le théorème suivant donne un résumé des propriétés les plus importantes de la dérivée de fonctions vectorielles.

Théorème 1. *Considérons deux fonctions vectorielles*

$$\vec{r}_1 : t \mapsto \vec{r}_1(t), \qquad \vec{r}_2 : t \mapsto \vec{r}_2(t),$$

et une fonction réelle

$$k : t \mapsto k(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' &= \vec{r}_1' + \vec{r}_2', \\
(k\vec{r}_1)' &= k'\vec{r}_1 + k\vec{r}_1', \\
(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' &= \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2'.
\end{aligned}$$

Il est facile à montrer que la fonction dérivée $\vec{r}'$ nous donne, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}$, un vecteur tangent au point $\vec{r}(t) = (a(t), b(t), c(t))$ à la courbe C qui forme la représentation graphique de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$. Par conséquent, la dérivée nous livre un vecteur directeur pour la tangente à la courbe au point $\vec{r}(t)$. On obtient donc, pour la tangente, l'équation (paramétrique)

$$\vec{r}(t) + k\vec{r}'(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5. Considérons le cercle de rayon R, représenté par la fonction vectorielle $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Au point $\vec{r}(t_0)$, la tangente est déterminée par l'équation paramétrique

$$(R\cos t_0, R\sin t_0) + k(-R\sin t_0, R\cos t_0),$$

c'est-à-dire que

$$x = R\cos t_0 - kR\sin t_0, \qquad y = R\sin t_0 + kR\cos t_0.$$

En éliminant le paramètre k on trouve alors l'équation

$$\cos t_0 x + \sin t_0 y - R = 0.$$

Si on interprète le paramètre t comme le temps, la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ décrit le mouvement d'un point dans le plan ou l'espace de dimension trois en fonction du temps. Le vecteur dérivé $\vec{r}'(t)$ est alors appelé le *vecteur de vitesse (instantanée)*, et on dénote ce vecteur par

$$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

La longueur $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ du vecteur de vitesse est la *vitesse instantanée* du point au moment t. L'angle τ entre l'axe des x (dans le sens positif) et le vecteur v détermine la direction dans laquelle le point évolue au moment t, et cet angle est calculé à l'aide de la formule

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{v_y}{v_x}.$$

On peut également écrire

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = |\vec{v}|\cos\tau, \qquad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} = |\vec{v}|\sin\tau.$$

La dérivée seconde de la fonction vectorielle est appelée *vecteur d'accélération (instantanée)*, et on la dénote par

$$\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Le module de ce vecteur est appelé *l'accélération (instantanée)* au moment t,

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

et comme avant,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}, \qquad a_x = \vec{a}\cdot\vec{i} = a\cos\alpha, \qquad a_y = \vec{a}\cdot\vec{j} = a\sin\alpha,$$

où α représente l'angle entre le vecteur $\vec{a}$ et l'axe x.

3. Longueur d'arc

Considérons une fonction vectorielle $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ (ou $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$), représentant une courbe C dans le plan ou l'espace de dimension trois, et choisissons sur cette courbe deux points, correspondant aux paramètres $t = a$ et $t = b$. On veut alors calculer la longueur de l'arc, formé par la courbe C, entre ces deux points (donc la distance entre ces points, mesuré le long de la courbe C).

Afin de déterminer cette distance, on divise d'abord la courbe en n arcs plus petits, dont les bornes correspondent aux valeurs du paramètre

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b,$$

en on représente ces points par

$$\vec{r}(t_i) = (x(t_i), y(t_i)) = (x_i, y_i).$$

La longueur de chaque arc est alors approchée par la distance entre les bornes $\vec{r}(t_{i-1})$ et $\vec{r}(t_i)$, qui est égale à

$$\lambda_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Il suit du théorème de Taylor que

$$x(a + \Delta) = x(a) + x'(\zeta)\Delta,$$

où $\zeta \in [a, a + \Delta]$, et on en déduit que

$$\lambda_i = \sqrt{x'(\zeta_i)^2 + y'(\zeta_i)^2}(t_i - t_{i-1}),$$

où $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. La longueur de l'arc total est, par conséquent, approchée par la somme

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\zeta_i)^2 + y'(\zeta_i)^2}(t_i - t_{i-1}).$$

En divisant l'arc en un nombre plus grand de sous-arcs (plus petits), on obtient une valeur approchée de plus en plus précise, impliquant que la longueur s de l'arc est donnée par

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\zeta_i)^2 + y'(\zeta_i)^2}(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b v(t)dt.$$

Considérons maintenant un point fixe sur la courbe, correspondant au paramètre t_0. La longueur de l'arc entre ce point fixe et le point correspondant à la valeur t du paramètre est alors donnée par

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du,$$

et, par conséquent, on voit que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |\vec{r}'(t)| = v(t).$$

On en déduit que la vitesse instantanée, comme prévu, indique la vitesse avec laquelle la longueur de l'arc parcouru change en fonction du temps. Il s'agit donc vraiment de la vitesse du mouvement du point le long de la courbe C.

Exemple 6. Considérons le cercle de rayon R, représenté par la fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t).$$

On calcule alors facilement que

$$v(t) = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R,$$

et que la longueur de l'arc entre $t_0 = 0$ et t est donnée par

$$s(t) = \int_0^t R du = Rt.$$

Définition 2. *On dit que la courbe C ou la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est paramétrée par longueur d'arc si, pour chaque valeur de t,*

$$v(t) = |\vec{r}'(t)| = 1,$$

c'est-à-dire que le vecteur de vitesse est un vecteur unitaire.

Remarque. Pour une telle courbe, il tient que

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} du = t - t_0,$$

d'où il suit que le paramètre t correspond, à une constante près, à la longueur de l'arc, mesurée à partir d'un point fixe.

Exemple 7. La courbe

$$\vec{r}(t) = (R\cos(\frac{t}{R}), R\sin(\frac{t}{R})),$$

est paramétrée par longueur d'arc, comme

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad v(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

4. Géométrie différentielle d'une courbe plane

Considérons une courbe C, représentée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, et supposons que cette courbe est paramétrée par longueur d'arc. Il est alors clair que la dérivée $\vec{r}'(t)$ de la fonction vectorielle nous donne, pour une valeur arbitraire t du paramètre, un vecteur unitaire $\vec{r}'(t) = \vec{t}(t)$, tangent à la courbe C dans le point $\vec{r}(t)$. Comme $|\vec{t}(t)|^2 = \vec{t}(t) \cdot \vec{t}(t) = 1$, il suit immédiatement que

$$(\vec{t}(t) \cdot \vec{t}(t))' = 2\vec{t}'(t) \cdot \vec{t}(t) = 0,$$

et on conclut que la dérivée seconde $\vec{r}''(t) = \vec{t}'(t)$ est un vecteur perpendiculaire à la tangente à la courbe. La longueur du vecteur $\vec{t}'(t)$ est appelée la *courbure* de la courbe C dans le point $\vec{r}(t)$,

$$\kappa(t) = |\vec{t}'(t)|.$$

Il suit que

$$\vec{t}'(t) = \kappa(t)\vec{n}(t),$$

où $\vec{n}(t)$ est un vecteur unitaire, perpendiculaire à la tangente en $\vec{r}(t)$.

Exemple 8. Le cercle de rayon R est représenté par la fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = (R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R}).$$

On calcule que $\vec{r}'(t) = (-\sin \frac{t}{R}, \cos \frac{t}{R})$, et la courbe est, par conséquent, paramétrée par longueur d'arc. La dérivée seconde est donnée par

$$\vec{r}''(t) = (-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R}),$$

et on conclut que la courbure du cercle est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{1}{R}.$$

La courbure du cercle est donc indépendant du point, et, au point correspondant au paramètre t, le vecteur normal est donné par

$$\vec{n}(t) = \frac{\vec{r}''(t)}{\kappa(t)} = (-\cos \frac{t}{R}, -\sin \frac{t}{R}).$$

Définition 3. *Le rayon de courbure $\varrho(t)$ d'une courbe en un point $\vec{r}(t)$ est le rayon du cercle dont la courbure (constante) est égale à la courbure $\kappa(t)$ au point considéré,*

$$\varrho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

Le cercle à travers le point $\vec{r}(t)$ ayant, au point $\vec{r}(t)$, la même tangente (dont la direction est donnée par $\vec{r}'(t)$) et la même courbure $\kappa(t)$ que la courbe, est appelé le cercle osculant. Le rayon de ce cercle est le rayon de courbure $\varrho(t)$, le centre du cercle est appelé le centre de courbure, et il est donné par le (point terminal du) vecteur

$$\vec{r}(t) + \varrho(t)\vec{n}(t).$$

Considérons maintenant une courbe C, décrite par une fonction vectorielle (générale) $\vec{r}(t)$. Dans ce cas, on a

$$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = v(t)\vec{t}(t), \qquad v(t) = \frac{ds}{dt},$$

où $\vec{t}(t)$ représente le vecteur unitaire, tangent à la courbe au point $\vec{r}(t)$. Il suit immédiatement que

$$\vec{r}''(t) = (v(t)\vec{t}(t))' = v'(t)\vec{t}(t) + v(t)(\vec{t}(t))' = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{t}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa(t)\vec{n}(t),$$

comme, par la règle de chaîne, on a

$$\frac{d}{dt}\vec{t}(t) = \frac{d}{ds}\vec{t} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t)\kappa(t)\vec{n}(t).$$

On conclut que le vecteur d'accélération $\vec{a}(t)$ a, en général, une composante normale et une composante tangentielle, données par

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{t}(t), \qquad \vec{a}_n = (\frac{ds}{dt})^2\kappa(t)\vec{n}(t),$$

et, par conséquent,

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{a}_n|}{v^2}.$$

Exemple 9. Considérons l'ellipse, représentée par la fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = (A\cos t, B\sin t).$$

Il est alors clair que

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-A\sin t, B\cos t), \qquad \vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = (-A\cos t, -B\sin t),$$

d'où il suit que

$$v(t) = \sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}, \vec{t}(t) = (\frac{-A\sin t}{\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}}, \frac{B\cos t}{\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}}).$$

Le vecteur normale étant donné par

$$\vec{n}(t) = (\frac{-B\cos t}{\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}}, \frac{-A\sin t}{\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}}),$$

on conclut que la projection scalaire de $\vec{a}$ sur $\vec{t}$ est

$$a_t(t) = \vec{a}(t)\cdot\vec{t}(t) = \frac{A^2\sin t\cos t - B^2\sin t\cos t}{\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}} = v'(t),$$

et que la longueur de la composante normale correspond à

$$a_n(t) = \vec{a}(t)\cdot\vec{n}(t) = \frac{AB}{\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}}.$$

La courbure de l'ellipse, au point $\vec{r}(t)$ est donc égale à

$$\kappa(t) = \frac{a_n(t)}{v^2(t)} = \frac{AB}{(A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

5. Calcul différentiel et vecteurs

1. Dérivée directionnelle

Considérons une fonction de deux variables réelles, $z = f(x, y)$, représentée par une surface S dans l'espace de dimension trois, un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans le plan, dont les composantes sont (u_1, u_2) et un point P_0 dans le plan, dont les coordonnées sont (x_0, y_0). On définit alors la *dérivée (directionnelle)* de la fonction f au point P_0 dans la direction $\vec{u}$ comme

$$D_{\vec{u}}f = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + ku_1, y_0 + ku_2) - f(x_0, y_0)}{k},$$

si cette limite existe.

On a déjà montré que la droite à travers le point P_0 et avec vecteur directeur $\vec{u}$ est donnée par l'équation paramétrique

$$x(t) = x_0 + tu_1, \quad y(t) = y_0 + tu_2, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le plan vertical à travers cette droite coupe la surface S suivant une courbe plane C à travers le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La dérivée directionnelle $D_{\vec{u}}f$ peut alors être considérée comme le "coefficient angulaire" de la tangente à la courbe C en ce point, ou la tangente de l'angle formé par cette tangente et le plan horizontal.

Pour des valeurs suffisamment petites de $k \in \mathbb{R}$, on montre que

$$f(x + ku_1, y + ku_2) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}ku_1 + \frac{\partial f}{\partial y}ku_2 + k^2 R,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$D_u f = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}ku_1 + \frac{\partial f}{\partial y}ku_2 + k^2 R}{k} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2.$$

Remarque. Si on dénote par α l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et l'axe x (dans le sens positif), les composantes du vecteur unitaire sont données par $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ et, par conséquent,

$$D_{\vec{u}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.$$

Remarque. En considérant une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ et un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans l'espace de dimension trois, on montre de la même façon que

$$D_{\vec{u}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Les valeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ sont, dans ce cas, les cosinus directeurs du vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire les cosinus des angles entre le vecteur $\vec{u}$ et les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

2. Champs de vecteurs

Définition 4. *Un champ de vecteurs ou champ vectoriel dans le plan est une fonction $\vec{F}$ qui associe, à chaque point P du plan, un vecteur libre $\vec{F}(P)$ dans le plan. Un point P avec coordonnées (x, y) est alors associé à un vecteur*

$$\vec{F}(P) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j},$$

qui sera représenté graphiquement comme un vecteur lié (ou une flèche) avec point initial en P.

De la même façon, on définit un champ vectoriel dans l'espace de dimension trois comme une fonction associant à un point P dans l'espace (avec coordonnées (x, y, z)) un vecteur $\vec{F}(P)$ dans cet espace, dont les composantes sont données par

$$\vec{F}(P) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}.$$

Exemple 10. Le champ vectoriel

$$\vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$$

associe à un point P dans le plan un vecteur unitaire, dont la direction correspond à celle de la droite à travers les points O et P, et qui est donc perpendiculaire au cercle C passant par ce point P, centré à l'origine O.

Exemple 11. Le champ vectoriel

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$$

associe à un point P du plan un vecteur perpendiculaire au vecteur de l'exemple précédent, qui est donc tangent au cercle C passant par ce point. La longueur du vecteur correspond maintenant à la distance entre les deux points O et P.

3. Gradient d'une fonction

Considérons une fonction $z = f(x, y)$. On définit alors le *gradient* de la fonction au point P (avec coordonnées (x_0, y_0)) comme le vecteur

$$\operatorname{grad} f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j}.$$

Pour une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ on définit le gradient en un point $P(x_0, y_0, z_0)$ comme le vecteur

$$\operatorname{grad} f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}.$$

En exécutant cette construction pour chaque point de l'espace considéré, on obtient un champ vectoriel

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}, \quad \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},$$

appelé le *gradient* de la fonction f.

Il est facile à montrer que, pour un vecteur unitaire arbitraire, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$, la dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction de $\vec{u}$, est donnée par

$$D_{\vec{u}}f = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{u}.$$

On a déjà montré que la dérivée directionnelle $D_{\vec{u}}f$ nous donne le coefficient angulaire de la tangente à la surface $z = f(x, y)$, dans la direction du vecteur $\vec{u}$, et mesure donc la "pente" de cette tangente ou la vitesse avec laquelle la fonction $f(x, y)$ change quand on évolue dans la direction du vecteur $\vec{u}$. On déduit que

$$D_{\vec{u}}f = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{u} = |\operatorname{grad} f| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos\theta,$$

où θ représente l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et le gradient $\operatorname{grad} f$ de la fonction au point considéré. La valeur de $D_{\vec{u}}f$ dépend, évidemment, du chois du vecteur unitaire $\vec{u}$, et il est facile à montrer que la valeur maximle de $D_{\vec{u}}f$ est atteinte quand $\cos\theta = 1$. Dans ce cas, $\theta = 0$, d'où il suit que les vecteurs $\operatorname{grad} f$ et $\vec{u}$ ont la même direction. On conclut que le gradient d'une fonction indique, en chaque point du plan, la direction dans laquelle la fonction $z = f(x, y)$ change le plus rapidement.

Exemple 12. Le gradient de la fonction $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ est donné par le champ vectoriel

$$\operatorname{grad} f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}.$$

Au point P avec coordonnées $(3, 4)$ on a

$$\operatorname{grad} f(P) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j},$$

et ce vecteur nous donne la direction dans laquelle, a partir du point P, la valeur de $f(x, y)$ change le plus rapidement.

Exemple 13. Le gradient de la fonction $f(x, y, z) = xyz$ est le champ vectoriel dans l'espace, donné par

$$\operatorname{grad} f = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

Remarque. Formellement, on peut considérer le gradient d'une fonction f comme le résultat de l'application d'un "opérateur différentiel" (appelé "nabla")

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

ou, dans l'espace de dimension trois,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

sur la fonction f. Pour cette raison, on dénotera souvent le gradient de la fonction comme

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(f).$$

4. Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel

Considérons maintenant un champ vectoriel

$$\vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath}, \qquad \vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath} + F_3\vec{k},$$

dans le plan ou dans l'espace. On définit alors la *divergence* du champ vectoriel comme la fonction (de deux ou de trois variables)

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}, \qquad \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

A l'aide de l'opérateur différentiel ∇, on peut introduire la divergence, formellement, comme un produit scalaire de ∇ et $\vec{F}$,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}.$$

Le *rotationnel* du champ vectoriel $\vec{F}$ dans l'espace de dimension trois est définie comme le champ vectoriel

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

De nouveau, on peut décrire le rotationnel, formellement, comme un produit vectoriel de l'opérateur différentiel ∇ et du champ vectoriel $\vec{F}$,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F},$$

qu'on calcule à l'aide d'un déterminant (formel)

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Exemple 14. La divergence du champ vectoriel

$$\vec{F} = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath}$$

est donnée par

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2x + 2y.$$

Exemple 15. La divergence du champ vectoriel

$$\vec{F} = xy\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + zx\vec{k}$$

est donnée par

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial yz}{\partial y} + \frac{\partial zx}{\partial z} = y + z + x,$$

le rotationnel du champ vectoriel étant donnée par

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = -y\vec{\imath} - z\vec{\jmath} - x\vec{k}.$$

Remarque. On montre facilement que, pour une fonction arbitraire f,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla\times\nabla f = 0,$$

et que, pour un champ vectoriel arbitraire $\vec{F}$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \nabla\cdot\nabla\times\vec{F} = 0.$$

6. Calcul intégral et vecteurs

1. Intégrale d'une fonction vectorielle

Considérons une fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

On définit alors l'*intégrale définie* de cette fonction comme le vecteur

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\vec{i} + \int_a^b y(t)dt\vec{j} + \int_a^b z(t)dt\vec{k}.$$

L'*intégrale indéfinie* est définie comme la fonction vectorielle

$$\int \vec{r}(t)dt = \int x(t)dt\vec{i} + \int y(t)dt\vec{j} + \int z(t)dt\vec{k}.$$

Comme chacune des trois fonctions primitives est définie à une constante d'intégration près, on remarque que la fonction vectorielle est définie à un vecteur constant $C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$ près.

Exemple 16. L'intégrale indéfinie de la fonction vectorielle $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \cos t\vec{j}$ est donnée par

$$\int \vec{r}(t)dt = t^2\vec{i} + \sin t\vec{j} + C_1\vec{i} + C_2\vec{j}.$$

2. Intégrale curviligne ou intégrale le long d'une courbe

Considérons une fonction $z = f(x, y)$, représentant une surface S dans l'espace de dimension trois, et une courbe C dans le plan $z = 0$, déterminée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ (pour les valeurs de $t \in [a, b]$). A travers chaque point de la courbe C, on peut alors tracer une droite verticale, qui coupe la surface S en un point $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. On construit, en fait, l'intersection du "cylindre" vertical sur la courbe C avec la surface S, et de cette façon on obtient une surface dans l'espace de dimension trois.

Afin de calculer l'aire de cette surface, on divise d'abord l'arc C en n sous-arcs, en choisissant des valeurs $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ du paramètre t. La longueur de chaque sous-arc sera dénotée par $\lambda_i, i = 1\ldots, n$. Sur chaque sous-arc, on choisit ensuite un point $(x(\xi_i), y(\xi_i))$ correspondant au paramètre $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. L'aire de la région au-dessus de l'arc C est alors, approximativement, donnée par

$$\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i))\lambda_i.$$

En choisissant des divisions de plus en plus fines de l'arc C, on obtient une valeur de plus en plus précise pour l'aire de la surface, qui est donc donnée par l'intégrale

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i))\lambda_i,$$

qu'on appelle *intégrale (curviligne)* de la fonction $z = f(x, y)$ le long de la courbe C.

En considérant un intervalle infinitésimal (de longueur dt) autour de la valeur t du paramètre, on obtient un arc infinitésimal du point $\vec{r}(t)$ au point $\vec{r}(t + dt)$. La longueur de cet arc infinitésimal est donnée par

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = |\vec{r}'(t)|dt,$$

et l'aire de la région au-dessus de cet arc est, par conséquent,

$$f(x(t), y(t))ds = f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

En prenant la somme de ces aires infintésimales, on conclut que

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t))|\vec{r}'(t)|dt.$$

Remarque. Si la courbe C est fermée, c'est -à-dire que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, on appelle l'intégrale curviligne de la fonction le long de la courbe C la *circulation*, et on la dénote par

$$\oint_C f(x, y)ds.$$

Exemple 17. Considérons la fonction $f(x, y) = x^2$ et le cercle C de rayon 1, représenté par la fonction $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$. On calcule alors facilement que $v(t) = 1$ et, par conséquent, l'intégrale curviligne (la circulation) est donnée par

$$\int_C f ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.$$

Exemple 18. Considérons maintenant la fonction $f(x, y) = x+y$, et la courbe C, représentée par la fonction $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$, $t \in [0, 1]$. Dans ce cas, on a

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \vec{j}, \qquad v(t) = \sqrt{2},$$

et l'intégrale curviligne est, par conséquent, donnée par

$$\int_C f ds = \int_0^1 (t + t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}.$$

Exemple 19. Pour la fonction $f(x, y) = xy$, et la courbe C, donnée par $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [0, 1]$, on a

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}, \qquad v(t) = \sqrt{1 + 4t^2},$$

et on en déduit que

$$\int_C f ds = \int_0^1 t^3\sqrt{1 + 4t^2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

Considérons maintenant le champ vectoriel $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ dans le plan, et une courbe C, représentant graphiquement une fonction vectorielle $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. On peut alors, pour chaque point P de la courbe, calculer la projection scalaire du vecteur $\vec{F}(P)$ sur le vecteur tangent à la courbe C,

$$F_t = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{v(t)}.$$

On définit alors l'intégrale curviligne de cette fonction F_t le long de la courbe C comme l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe C. Il suit de la définition que cette intégrale curviligne peut être calculée comme

$$\int_C F_t ds = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{v(t)} v(t)dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt.$$

On dénotera souvent cette intégrale comme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy.$$

Remarque. Le travail, fait par une force constante $\vec{F}$ lors d'un mouvement rectiligne sur une distance Δs, est donné par

$$W = F_t \cdot \Delta s,$$

où F_t représente la longueur de la composante de la force $\vec{F}$ dans la direction du mouvement. Considérons maintenant une force $\vec{F}$ qui agit sur un point qui bouge le long d'une courbe C (donnée par l'équation paramétrique $\vec{r}(t)$). Le travail W fait par cette force est alors déterminée par l'intégrale curviligne

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemple 20. Considérons le champ vectoriel $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et la courbe C, donnée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [0, 1]$. On voit alors que

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \qquad d\vec{r} = dt\vec{i} + 2tdt\vec{j},$$

et on en déduit que

$$\int_C F_t ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t + 2t^3)dt = 1.$$

Exemple 21. Pour le champ vectoriel $\vec{F}$ de l'exemple précédent, et la courbe C, donnée par $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$, $t \in [0, 1]$. on voit que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 2tdt = 1.$$

Exemple 22. Considérons maintenant le champ vectoriel $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ et le cercle C de rayon R, représenté par la fonction vectorielle

$$\vec{r}(t) = R\cos t\vec{i} + R\sin t\vec{j}, t \in [0, 2\pi].$$

Dans ce cas,

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = -R \sin t\vec{i} + R \cos t\vec{j}, \qquad d\vec{r} = -R \sin t dt\vec{i} + R \cos t dt\vec{j},$$

et la circultion est donnée par

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

3. Théorème de Green

Considérons un champ vectoriel

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$$

et un domaine S dans le plan, borné par une courbe C, munie d'une orientation positive. Supposons que cette courbe C comprend deux arcs C_1 et C_2 entre les deux points P_1 (dont les coordonnées sont (a, c)) et P_2 (avec coordonnées (b, d)). Si on suppose, en plus, que chaque arc a au maximum une intersection avec chaque droite verticale $x = A$ (resp. chaque droite horizontale $y = B$), les arcs sont déterminés par les équations paramétriques

$$C_1 : x = t, y = f_1(t), t \in [a, b], \qquad C_2 : x = t, y = f_2(t), t \in [a, b],$$

resp. les équations paramétriques

$$C_1 : x = g_1(t), y = t, t \in [c, d], \qquad C_2 : x = g_2(t), y = t, t \in [c, d].$$

Il est maintenant facile à montrer que

$$\begin{aligned}
\int\int_S \frac{\partial F_1}{\partial y} dS &= \int_{x=a}^{b} (\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy) dx \\
&= \int_a^b F_1(x, f_2(x)) - F_1(x, f_1(x)) dx \\
&= \int_a^b F_1(x, f_2(x)) dx - \int_a^b F_1(x, f_1(x)) dx \\
&= -\int_b^a F_1(x, f_2(x)) dx - \int_a^b F_1(x, f_1(x)) dx,
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\int\int_S \frac{\partial F_2}{\partial x} dS &= \int_{y=c}^{d} (\int_{x=g_2(y)}^{g_1(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx) dy \\
&= \int_c^d F_2(g_1(y), y) - F_2(g_2(y), y) dy \\
&= \int_c^d F_2(g_1(y), y) dy - \int_c^d F_2(g_2(y), y) dy \\
&= \int_c^d F_2(g_1(y), y) dy + \int_d^c F_2(g_2(y), y) dy,
\end{aligned}$$

et, par conséquent, on a

$$\int\int_S (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dS = \int_c^d F_2(g_1(y), y)dy + \int_d^c F_2(g_2(y), y)dy$$
$$+ \int_b^a F_1(x, f_2(x))dx + \int_a^b F_1(x, f_1(x))dx.$$

Il est également clair que

$$\begin{aligned} \oint_C F_1 dx &= \int_{C_1} F_1 dx + \int_{C_2} F_1 dx \\ &= \int_a^b F_1(t, f_1(t))dt + \int_b^a F_1(t, f_2(t))dt, \end{aligned}$$

et de la même façon on montre que

$$\begin{aligned} \oint_C F_2 dy &= \int_{C_1} F_2 dy + \int_{C_2} F_2 dy \\ &= \int_c^d F_2(g_1(t), t)dt + \int_d^c F_2(g_2(t), t)dt, \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_C F_1 dx + F_2 dy \\ &= \oint_C F_1 dx + \oint_C F_2 dy \\ &= \int_a^b F_1(t, f_1(t))dt + \int_b^a F_1(t, f_2(t))dt + \int_c^d F_2(g_1(t), t)dt + \int_d^c F_2(g_2(t), t)dt. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dS.$$

Le résultat obtenu ci-dessus peut être généralisé au cas d'une courbe générale, menant au résultat suivant:

Théorème 2. *(Théorème de Green) Considérons un champ vectoriel $\vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath}$ dans le plan et une courbe C, déterminée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, orientée positivement (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Alors*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dS,$$

où S est la région plane, bornée par la courbe C.

Exemple 23. Considérons le champ vectoriel $\vec{F} = (2xy - x^2)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j}$ et la courbe C, formée par les arcs

$$C_1 : x = t, y = t^2, t \in [0,1], \qquad C_2 : x = t^2, y = t, t \in [0,1].$$

On voit alors que

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (2t^3 - t^2) + 2t(t + t^4)dt + \int_1^0 (2t^3 - t^4)2t + (t^2 + t^2)dt \\ &= \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

On constate que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - 2x,$$

et donc

$$\begin{aligned}\int\int_S \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dS &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)dydx \\ &= \int_0^1 (y - 2xy|_{y=x^2}^{\sqrt{x}})dx \\ &= \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

4. Champs vectoriels conservatifs

Définition 5. *Un champ vectoriel $\vec{F}$ est appelé conservatif ou conservateur s'il existe une fonction $U(x,y)$ (ou $U(x,y,z)$) telle que*

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U.$$

La fonction U est appelée le potentiel du champ vectoriel $\vec{F}$.

Pour un champ vectoriel conservatif $\vec{F}$ avec potentiel $U(x,y)$ on voit que

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} = \operatorname{grad} U.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

et on conclut que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0.$$

On déduit alors que, pour une région arbitraire S dans le plan,

$$\int\int_S \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} dS = 0,$$

et il suit du théorème de Green que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

pour une courbe arbitraire C dans le plan. En découpant le circuit C en deux arcs C_1 et C_2, il suit que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

et on conclut que la circulation d'un champ vectoriel conservatif ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point initial et final du chemin.

On sait que $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ pour une fonction arbitraire f, et on en déduit que, pour un champ vectoriel conservatif $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, déterminé par le potentiel U,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0.$$

Un champ vectoriel conservatif n'a donc pas de rotationnel.

Supposons maintenant que le champ vectoriel $\vec{F}(x, y)$ dans le plan n'a pas de rotationnel, c'est-à-dire que

$$\operatorname{rot} F = (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\vec{k} = 0.$$

Il suit alors directement que $\vec{F}$ est conservatif.

On démontre, en général, que pour un champ vectoriel sans rotationnel, $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, la circulation

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

et que, par conséquent, l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ne dépend pas du chemin suivi C entre deux points.