

HOGERE ZEEVAARTSCHOOL ANTWERPEN

ONDERWIJSEENHEID 5

EXACTE WETENSCHAPPEN EN INFORMATICA

# DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

PETER BUEKEN

HZS-OE5-NW141

Eerste jaar Bachelor Nautische Wetenschappen

Versie 1.6

11 november 2012



# INHOUDSTAFEL

<b>Inhoudstafel</b>	<b>3</b>
<b>1 Reële functies</b>	<b>7</b>
1.1 Reële functies	7
1.2 Elementaire functies en hun grafische voorstelling	7
1.2.1 Constante functies	7
1.2.2 Machtsfuncties	8
1.2.3 Exponentiële functies	9
1.2.4 Logaritmische functies	10
1.2.5 Goniometrische functies	12
1.2.6 Cyclometrische functies	13
1.3 Constructies met reële functies	15
1.4 Getallenrijen	17
<b>2 Limieten</b>	<b>19</b>
2.1 Definities	19
2.2 Rekentechnieken	22

<b>3 Continuïteit</b>	<b>25</b>
3.1 Definities	25
3.2 Eigenschappen van continue functies	26
<b>4 Afgeleiden</b>	<b>29</b>
4.1 Afgeleide van een reële functie	29
4.2 Meetkundige betekenis	30
4.3 Afgeleiden van machtsfuncties	30
4.4 Rekenregels	31
4.5 Afgeleiden van goniometrische functies	34
4.6 Afgeleiden van cyclometrische functies	35
4.7 Afgeleiden van logaritmische en exponentiële functies	37
4.8 Logaritmisch afleiden	39
4.9 Hogere afgeleiden	39
4.10 Impliciet afleiden	40
4.11 De differentiaal van een functie	41
<b>5 Toepassingen van afgeleiden</b>	<b>45</b>
5.1 Variatie van een functie	45
5.1.1 Verloop van een reële functie	45
5.1.2 Minima en maxima van een functie	46
5.1.3 Berekening van minima en maxima met de eerste afgeleide	47
5.1.4 De studie van de tweede afgeleide (kromming)	49
5.1.5 Berekenen van minima en maxima met de tweede afgeleide	50
5.2 Vergelijking van de raaklijn en de normaal	51
5.3 De afgeleide als snelheid	53
5.4 Gekoppelde snelheden	56
<b>6 Partiële afgeleiden</b>	<b>57</b>
6.1 Inleiding	57
6.2 Partiële afgeleiden	57
6.3 Partiële afgeleiden van hogere orde	60
6.4 Partiële en totale differentiaal	61
6.5 De kettingregel	62

---

<b>7</b>	<b>Belangrijke stellingen</b>	<b>67</b>
<b>8</b>	<b>De formules van Taylor-MacLaurin</b>	<b>73</b>
8.1	Inleiding	73
8.2	De formules van Taylor-MacLaurin	75
8.3	Reeksontwikkelingen van Taylor-MacLaurin	76
<b>9</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>79</b>
9.1	Definitie	79
9.2	Rekenen met complexe getallen	80
9.3	Grafische voorstelling	81
9.4	Goniometrische voorstelling	81
9.5	Exponentiële voorstelling	84
<b>10</b>	<b>Onbepaalde integratie</b>	<b>87</b>
10.1	Inleiding	87
10.2	Basisintegralen	88
10.3	De substitutiemethode	89
10.4	Partiële integratie	90
10.5	Integratie van rationale functies	93
10.5.1	Graad van de teller groter dan of gelijk aan graad van de noemer	93
10.5.2	Splitsing in partiële breuken	94
10.5.3	Integratie van de partiële breuken	98
10.6	Integratie van goniometrische functies	102
10.7	Goniometrische substituties	105
10.8	Integratie van irrationale functies	109
<b>11</b>	<b>Bepaalde integratie</b>	<b>111</b>
11.1	Definitie en basiseigenschappen	111
11.2	Oppervlakte van een vlakke figuur	114
11.3	Volume van een omwentelingslichaam	117
11.4	Lengte van een kromme	121
11.5	Oppervlakte van een omwentelingslichaam	122
11.6	Zwaartepunt van een vlakke figuur	122
11.7	Zwaartepunt van een omwentelingslichaam	124
11.8	Traagheidsmoment van een vlakke figuur	126

11.9 Traagheidsmoment van een omwentelingslichaam	129
---	-----

## **12 Meervoudige integralen** **135**

12.1 Definitie	135
12.2 Berekening van dubbelintegralen over een rechthoekig gebied	137
12.3 Dubbelintegraal over een willekeurig domein	141
12.4 Drievoudige integraal	144

## **13 Numerieke integratie** **147**

13.1 Inleiding	147
13.2 De regel van het centrale punt (midpoint regel)	147
13.3 De trapeziumregel	149
13.4 De regel van Simpson	150

# HOOFDSTUK 1

## REËLE FUNCTIES

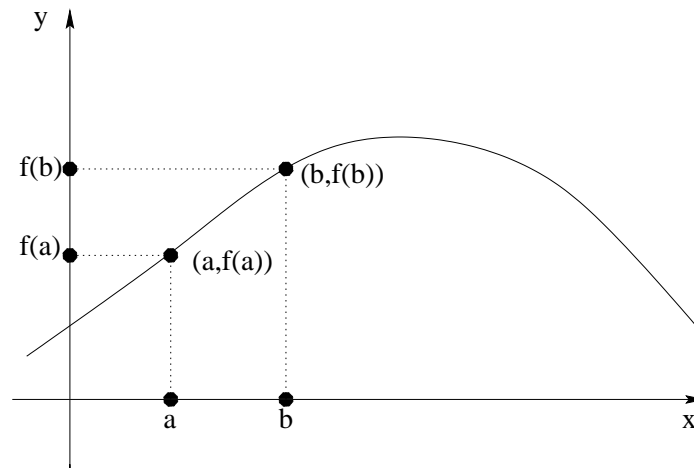
### 1. Reële functies

Een *reële functie*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$  (soms ook voorgesteld als  $y = f(x)$ ) is een voorschrift dat met elk reëel getal  $x$  ten hoogste één (dus één of geen) reëel getal  $f(x)$  laat overeenkomen. Het getal  $f(x)$  (als dit getal bestaat) wordt het *beeld* van  $x$  onder de functie  $f$  genoemd. De verzameling van alle reële getallen  $x$  die een beeld hebben onder de functie  $f$  noemen we het *domein* van de functie  $f$ , en we duiden deze verzameling aan als  $\text{dom}(f)$ .

**Voorbeeld 1.** De functie  $y = x^2$  beeldt een reëel getal  $x$  af op zijn kwadraat  $x^2$ . Het beeld van 0 onder deze functie is 0, het beeld van 2 is 4. Het domein van deze functie is de verzameling van alle reële getallen,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ .

**Voorbeeld 2.** De functie  $y = \sqrt{x}$  beeldt een getal  $x$  af op zijn (positieve) vierkantswortel. Het beeld van 0 onder deze functie is 0, het beeld van 9 is 3. Het is duidelijk dat deze functie enkel een beeld geeft voor positieve reële getallen, en dat bijgevolg  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ .

Stel dat  $y = f(x)$  een reële functie is. Door voor elk punt  $x \in \text{dom}(f)$  het beeld  $f(x)$  onder de functie  $f$  te berekenen kunnen we de functie grafisch voorstellen als de verzameling van de punten  $(x, f(x))$  in het vlak. De figuur die we zo bekomen noemen we de *grafiek* van de functie  $f$ .



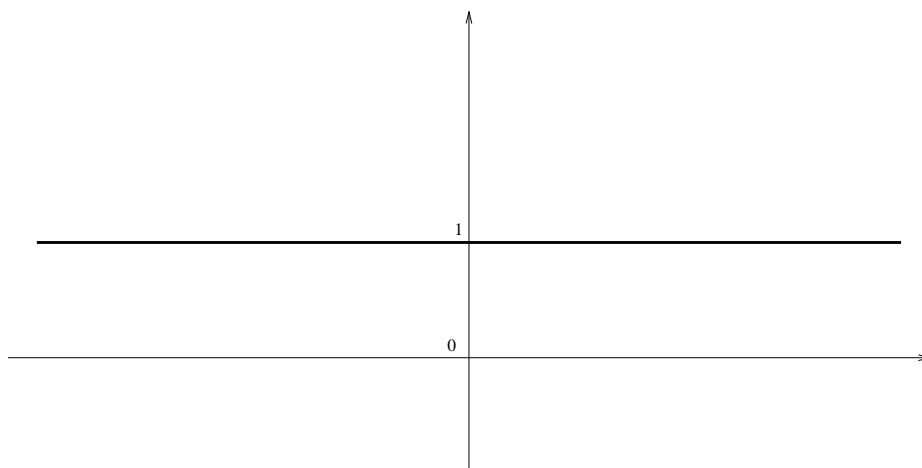
Figuur 1. Grafiek van een functie  $y = f(x)$ .

## 2. Elementaire functies en hun grafische voorstelling

In deze paragraaf verzamelen we een aantal elementaire reële functies die een belangrijke rol zullen spelen in het vervolg van deze cursus. We stellen enkele van deze functies grafisch voor en bestuderen hun belangrijkste eigenschappen.

### 1. Constante functies

**Definitie 1.** Stel dat  $c$  een willekeurig reëel getal is. De functie  $y = c$ , die elk reëel getal  $x$  afbeeldt op het getal  $c$  wordt een *constante functie* genoemd.



Figuur 2. Grafiek van de constante functie  $y = 1$ .



## 2. Machtsfuncties

Stel dat  $x$  een willekeurig reëel getal is en  $n$  een strikt positief natuurlijk getal. Dan definiëren we de  $n$ -de macht van  $x$  als het produkt van  $n$  gelijke factoren  $x$ ,

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \quad (n \text{ factoren}).$$

De eerste macht van een getal  $x$  is dan duidelijk gelijk aan dit getal zelf,  $x^1 = x$ . Het getal  $n$  wordt de *exponent* genoemd, het getal  $x$  is het *grondtal*.

**Voorbeeld 3.** De tweede macht of het *kwadraat* van 5 wordt gegeven door  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ . De vijfde macht van 2 is  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ .

Deze definitie van machtsverheffing kan eenvoudig worden uitgebreid tot gevallen waarin de exponent geen strikt positief getal is maar een willekeurig reëel getal  $a$ .

Indien  $a = 0$  stellen we dat  $x^0 = 1$  voor alle  $x \in \mathbb{R}_0$ . Voor elk positief rationaal getal  $a = \frac{p}{q}$ , met  $p$  en  $q$  natuurlijke getallen, stellen we verder dat

$$x^a = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p},$$

indien deze definitie zin heeft.

**Voorbeeld 4.** De definitie levert ons dat

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8, \quad (-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = -32.$$

Anderzijds is  $(-4)^{\frac{1}{2}}$  niet gedefinieerd omdat we hiervoor  $\sqrt{-4}$  moeten kunnen berekenen.

Om de machtsverheffing met negatieve exponenten te definiëren spreekt men af dat

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a},$$

opnieuw indien deze definitie zin heeft.

**Voorbeeld 5.** We stellen dat

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad (-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{4}.$$

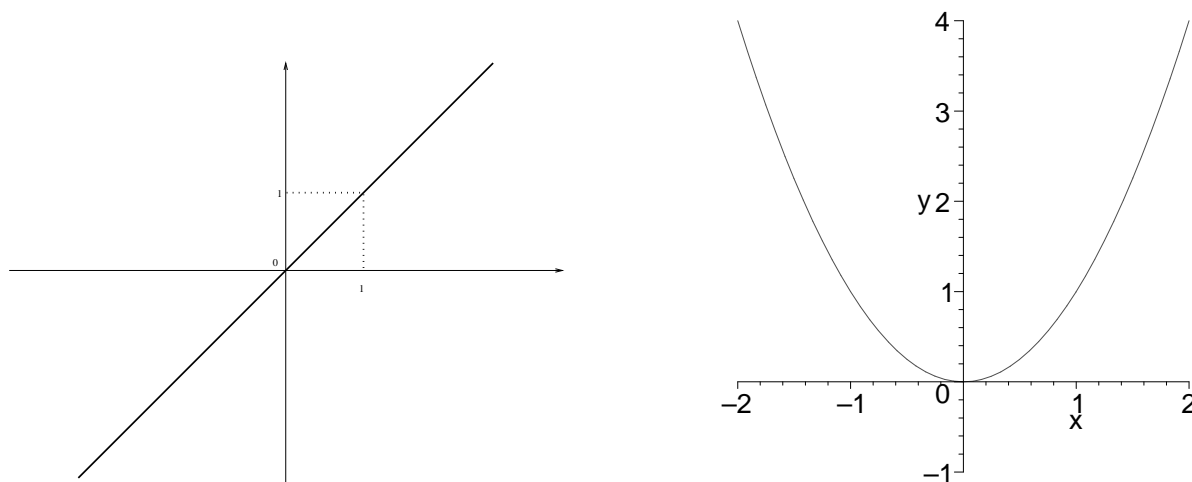
Anderzijds zijn  $0^{-2}$  en  $(-4)^{-\frac{1}{2}}$  niet gedefinieerd.

Het is eenvoudig in te zien dat voor alle getallen  $x$ ,  $a$ ,  $b$ , waarvoor de beschouwde machtsverheffingen bestaan, geldt dat

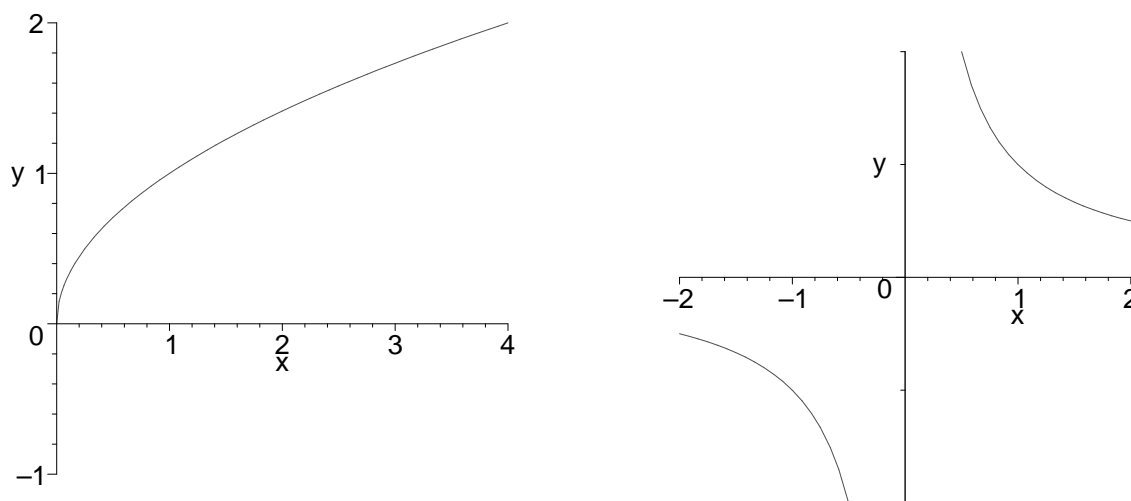
$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = (x^b)^a = x^{ab}.$$

We kunnen nu met behulp van de machtsverheffing een aantal nieuwe klassen van elementaire reële functies invoeren: de machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies.

**Definitie 2.** *Stel dat  $a$  een willekeurig reëel getal is. De reële functie  $y = x^a$  wordt een machtsfunctie genoemd. Indien we  $n = 1$  stellen bekomen we de identieke functie  $y = x$ .*



Figuur 3. Grafiek van de identieke functie  $y = x$  en de kwadratische functie  $y = x^2$ .



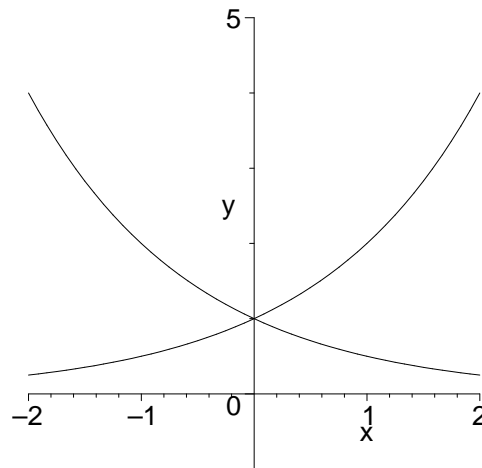
Figuur 4. Grafiek van de functies  $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  en  $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ .

### 3. Exponentiële functies

**Definitie 3.** Stel dat  $a$  een strikt positief reëel getal is verschillend van 1. De functie  $y = a^x$  wordt dan de *exponentiële functie met grondtal  $a$*  genoemd.

Exponentiële functies komen veelvuldig naar voor bij de studie van verschijnselen waarbij een gegeven grootte in een vast tijdsinterval met een bepaalde factor toeneemt of afneemt, zoals berekening van kapitaalaangroei met samengestelde intresten en groei van populaties van bacteriën.

**Voorbeeld 6.** Stel dat we een beginkapitaal  $K_0$  investeren met een intrestvoet  $p$ . Na een jaar krijgen we dan een intrest  $K_0 p$  die we bij ons oorspronkelijk kapitaal beleggen. We hebben dan een kapitaal  $K_0 + K_0 p = K_0(1 + p)$ . Na een volgend jaar wordt ons kapitaal dan



Figuur 5. Grafieken van de exponentiële functies  $y = 2^x$  en  $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

$K_0(1+p) + K_0(1+p)p = K_0(1+p)^2$ . We kunnen deze constructie voortzetten en we vinden dat het kapitaal in functie van de tijd gegeven wordt door

$$K(n) = K_0(1+p)^n.$$

#### 4. Logaritmische functies

Stel opnieuw dat  $a$  een strikt positief reëel getal is verschillend van 1. Het  $a$ -logaritme van het getal  $b$ ,  $\log_a b$ , wordt gedefinieerd als het getal  $c$  waarvoor  $a^c = b$ , indien dit getal bestaat. Het is dan ook duidelijk dat

$$a^{\log_a b} = b = \log_a a^b.$$

**Voorbeeld 7.** We zien dadelijk dat

$$\log_{10} 1000 = 3, \quad \log_2 32 = 5, \quad \log_3 81 = 4.$$

Anderzijds zijn  $\log_2(-4)$  en  $\log_{10} 0$  niet gedefinieerd.

In Hoofdstuk 2 zullen we een bijzonder (irrationaal) reëel getal invoeren dat we aanduiden met  $e \sim 2.7182818$ . Dit getal zal een belangrijke rol spelen in de studie van differentiaal- en integraalrekening. Het logaritme met dit irrationaal getal  $e$  als grondtal wordt het *natuurlijke* of *neperiaanse logaritme* genoemd en aangeduid met het speciale symbool  $\ln$ ,

$$\log_e x = \ln x.$$

**Stelling 1.** *Stel dat  $a$  een strikt positief reëel getal is, verschillend van 1, en  $x$  en  $y$  twee willekeurige reële getallen. Als alle betrokken uitdrukkingen bestaan, dan geldt*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

**Bewijs.** We weten dat

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

en bijgevolg is

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Op dezelfde manier is

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = a^{\log_a x} a^{-\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y},$$

en bijgevolg is ook

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Tenslotte zien we op dezelfde wijze dat

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$

en dus is

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

■

**Stelling 2.** *Stel dat  $a$  en  $b$  twee strikt positieve reële getallen zijn, verschillend van 1. Dan is*

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

**Bewijs.** We weten uit wat voorafgaat dat

$$a^{\log_a b} = b.$$

Als we van beide leden van deze gelijkheid het  $b$ -logaritme berekenen vinden we dat

$$\log_b a^{\log_a b} = 1.$$

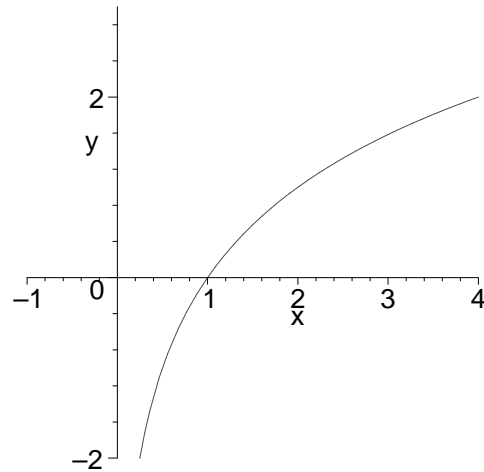
Uit Stelling 1 volgt dan dat

$$\log_a b \log_b a = 1,$$

en dus geldt

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

■



Figuur 6. Grafiek van de logaritmische functie  $y = \log_2(x)$ .

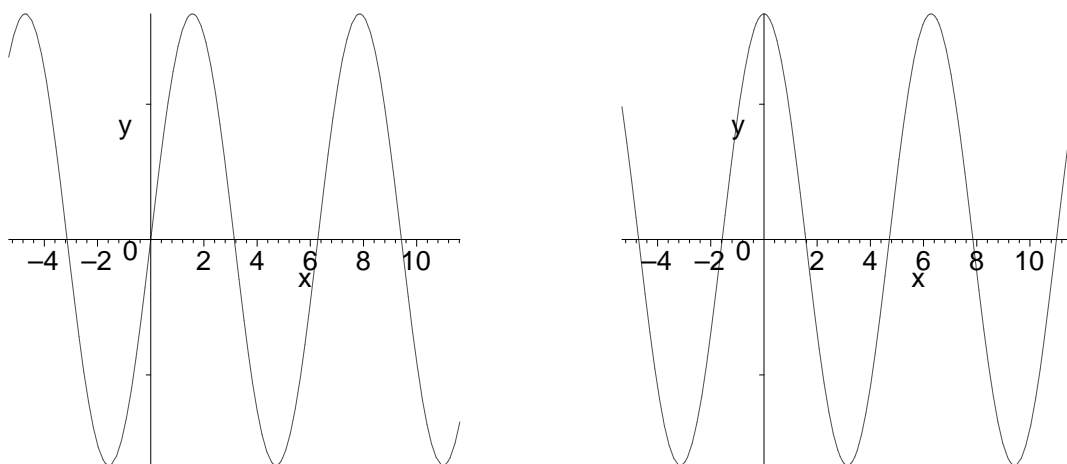
**Definitie 4.** Stel dat  $a$  een strikt positief reëel getal is, verschillend van 1. De functie  $y = \log_a(x)$  wordt de logaritmische functie met grondtal  $a$  genoemd.

## 5. Goniometrische functies

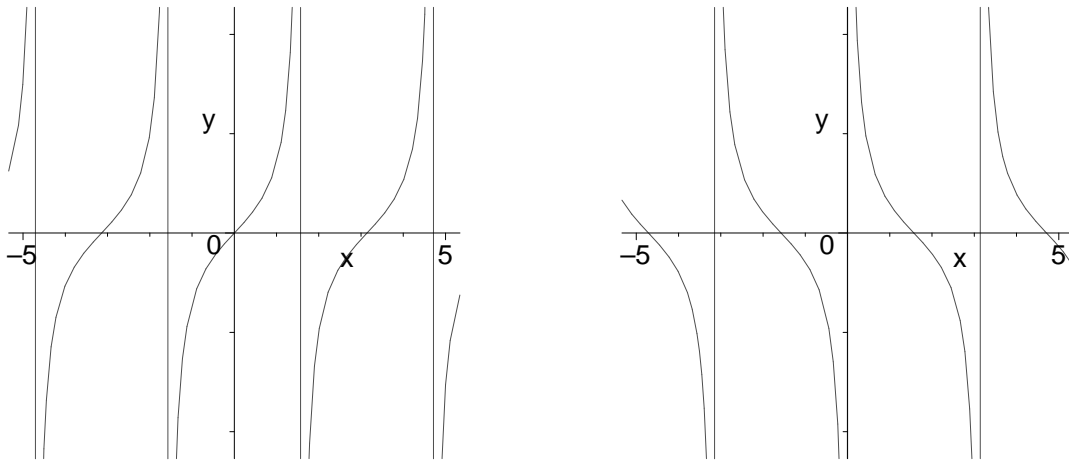
**Definitie 5.** De functies

$$y = \sin(x), \quad y = \cos(x), \quad y = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad y = \operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)},$$

worden de (elementaire) goniometrische functies genoemd.



Figuur 7. Grafiek van de functies  $y = \sin(x)$  en  $y = \cos(x)$ .



Figuur 8. Grafiek van de functies  $y = \text{tg}(x)$  en  $y = \text{cotg}(x)$ .

## 6. Cyclometrische functies

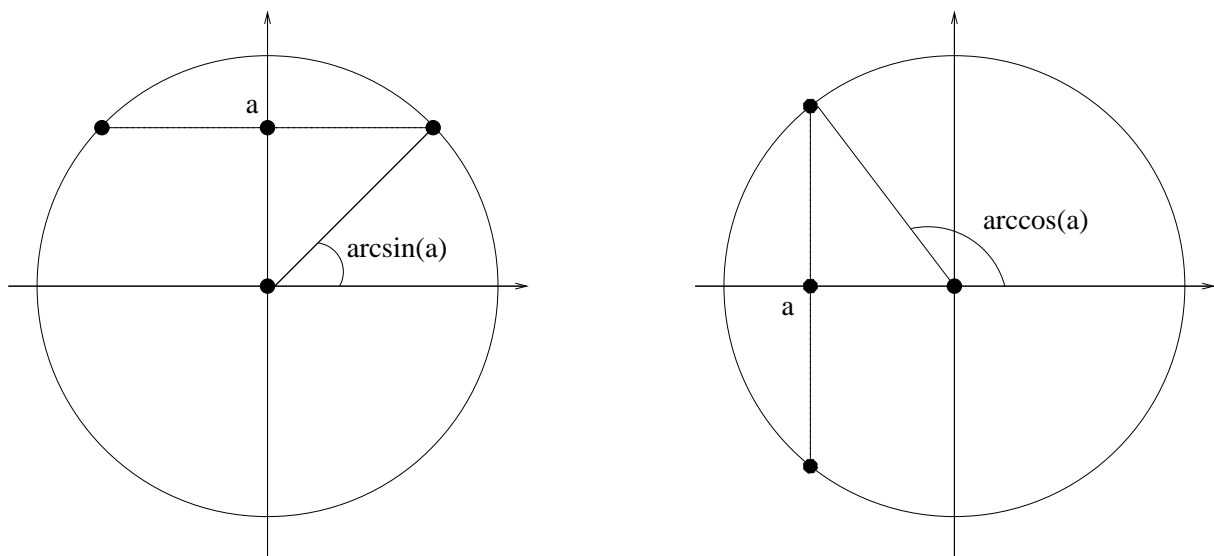
De *boogsinus*  $\arcsin(a)$  van een getal  $a$  wordt gegeven door de hoek  $\alpha$  waarvoor  $\sin(\alpha) = a$ . Het is duidelijk (zie bijvoorbeeld Figuur 9) dat de boogsinus enkel gedefinieerd is voor getallen uit het interval  $[-1, 1]$ . Bovendien is de hoek  $\alpha$  niet uniek bepaald. We weten immers dat

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha + 2\pi n) = \sin(\pi - \alpha + 2\pi n),$$

voor een willekeurig geheel getal  $n \in \mathbb{Z}$ , waardoor we een oneindig aantal hoeken vinden waarvoor de sinus gelijk is aan een gegeven getal  $a \in [-1, 1]$ . Indien men echter steeds de hoek  $\alpha$  kiest die in het interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ligt, is de boogsinus van het getal  $a$  wel uniek bepaald.

**Voorbeeld 8.** De bovenstaande definitie levert ons dat

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

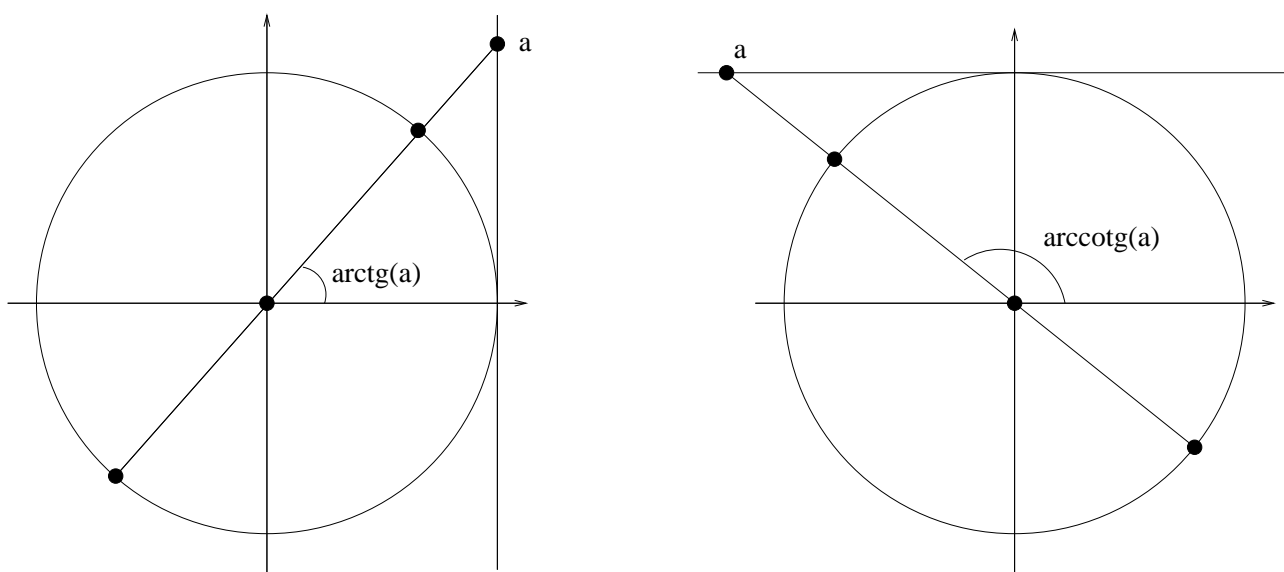


Figuur 9. De constructie van  $\arcsin(a)$  en  $\arccos(a)$ .

Op dezelfde wijze kan men de *boogcosinus*  $\arccos(a)$  van een getal  $a$  definiëren, waarbij we nu de mogelijke waarden voor de hoek  $\alpha$  beperken tot het interval  $[0, \pi]$ . Voor de definitie van de *boogtangens*  $\arctg(x)$  van een getal beperken we ons op dezelfde wijze tot het interval  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , terwijl we ons voor de *boogcotangens*  $\operatorname{arccotg}(a)$  beperken tot het interval  $]0, \pi[$ . Het dient wel opgemerkt dat de boogtangens en boogcotangens gedefinieerd zijn voor elk reëel getal  $a \in \mathbb{R}$ .

**Voorbeeld 9.**

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arctg(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$



Figuur 10. De constructie van  $\arctg(a)$  en  $\operatorname{arccotg}(a)$ .

**Definitie 6.** De functies

$$y = \arcsin(x), \quad y = \arccos(x), \quad y = \arctg(x), \quad y = \operatorname{arccotg}(x),$$

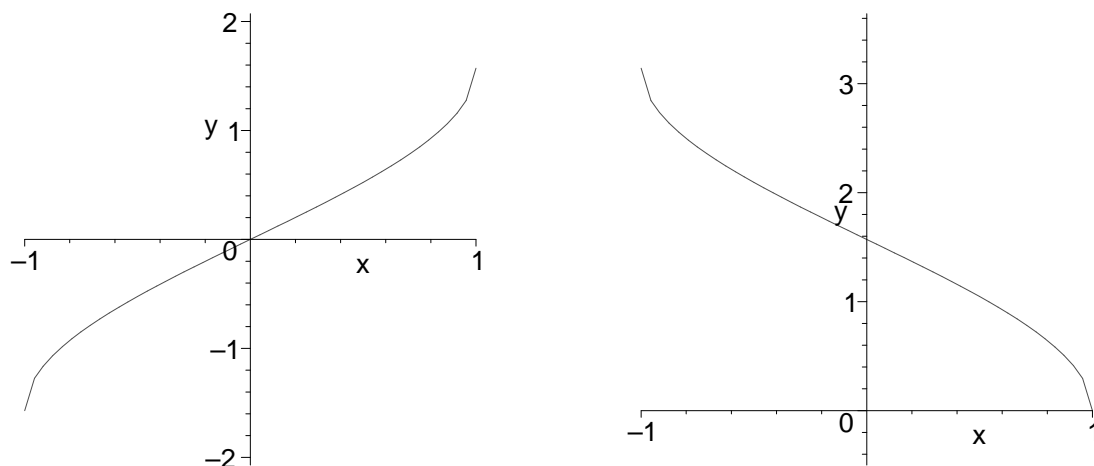
worden de (*elementaire*) *cyclometrische functies* genoemd.

### 3. Constructies met reële functies

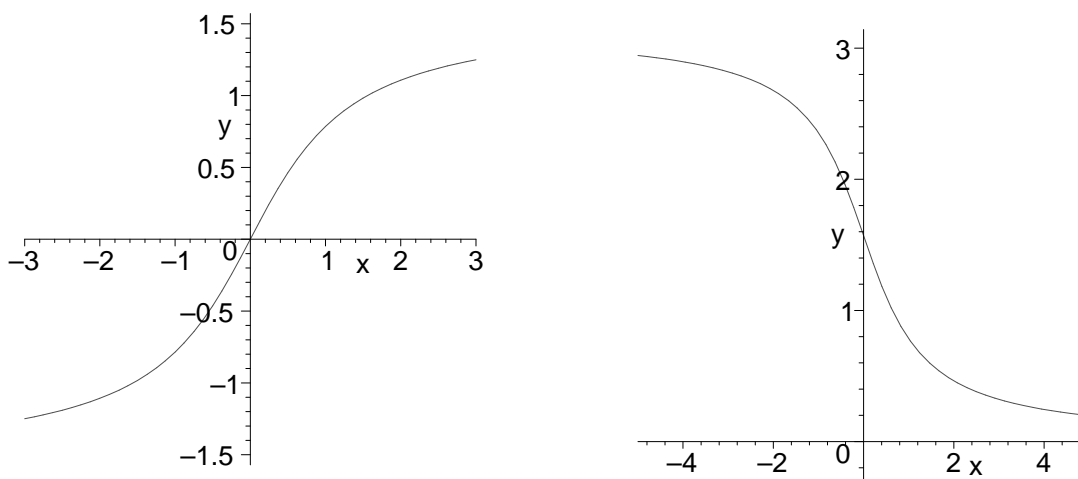
Stel dat we twee reële functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$  en  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$  gegeven krijgen. Dan kunnen we een nieuwe functie  $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiëren die een reëel getal  $x$  afbeeldt op de som van  $f(x)$  en  $g(x)$  (als beide beelden bestaan). We noemen deze functie de *som* van de functies  $f$  en  $g$ . Op dezelfde manier definiëren we het *verschil*  $f - g$ , het *produkt*  $f \cdot g$  en het *quotiënt*  $\frac{f}{g}$  van twee functies  $f$  en  $g$ , en de  $n$ -de macht  $f^n$  en de  $n$ -de machtswortel  $\sqrt[n]{f}$  van een reële functie  $f$ . De functie

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

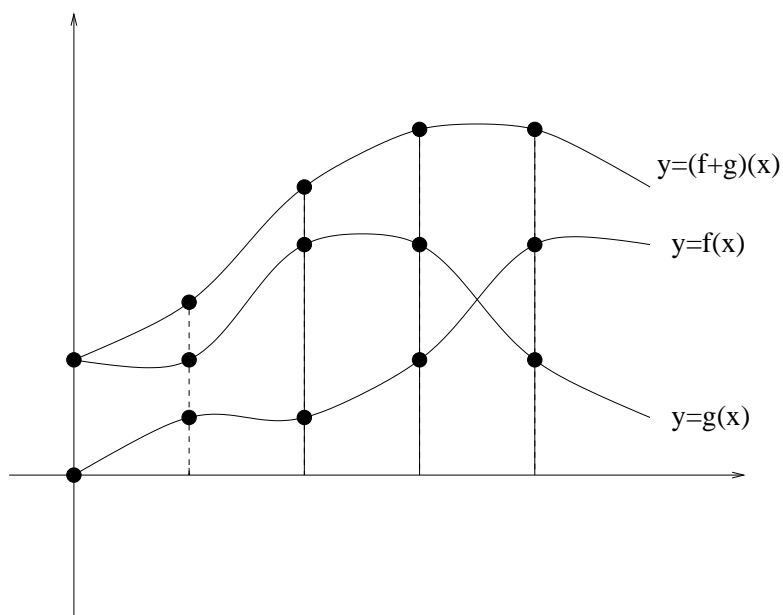
wordt de *samenstelling* (“g na f”) van de functies  $f$  en  $g$  genoemd.



Figuur 11. Grafiek van de cyclometrische functies  $y = \arcsin(x)$  en  $y = \arccos(x)$ .



Figuur 12. Grafiek van de cyclometrische functies  $y = \arctg(x)$  en  $y = \arccotg(x)$ .



Figuur 13. De som  $f + g$  van twee functies  $f$  en  $g$ .



Het is duidelijk dat we een groot aantal nieuwe functies kunnen construeren met behulp van de elementaire functies en deze eenvoudige constructies.

**Voorbeeld 10.** Stel  $f(x) = x^2$  en  $g(x) = \sin(x)$ , dan is

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= x^2 + \sin(x), \\(f - g)(x) &= x^2 - \sin(x), \\(f \cdot g)(x) &= x^2 \sin(x), \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{x^2}{\sin(x)}, \\(g \circ f)(x) &= g(x^2) = \sin(x^2), \\(f \circ g)(x) &= f(\sin(x)) = \sin^2(x).\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we deze techniek ook gebruiken om een ingewikkelde functie  $y = f(x)$  op te splitsen in een aantal componenten, waardoor we bepaalde berekeningen zeer sterk zullen kunnen vereenvoudigen.

**Voorbeeld 11.** De functie

$$f(x) = \sin(3x^2 + 1)$$

is samenstelling van de functie  $y = \sin(x)$  met de functie

$$y = 3x^2 + 1,$$

die op haar beurt de som is van de constante functie  $y = 1$  met de functie

$$y = 3x^2.$$

Deze laatste functie is een produkt van de constante functie  $y = 3$  met de kwadratische functie  $y = x^2$ .

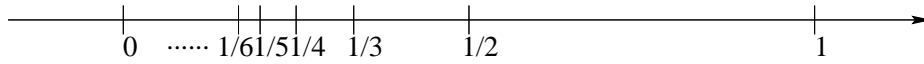
## 4. Getallenrijen

Een *getallenrij* is een functie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto f(n)$  (soms aangegeven als  $x_n = f(n)$ ) van de natuurlijke getallen naar de reële getallen, dit wil zeggen een voorschrift dat met elk natuurlijk getal  $n$  hoogstens één reël getal  $f(n)$  laat overeenkomen. Om praktische redenen zullen we steeds veronderstellen dat  $f$  slechts voor een eindig aantal natuurlijke getallen niet gedefinieerd is, en dat we dus voor alle voldoende grote waarden van  $n$  een beeld kunnen berekenen. We zullen een getallenrij  $x_n = f(n)$  vaak voorstellen door middel van de rij beeldpunten

$$x_0 = f(0), x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots$$

**Voorbeeld 12.** De getallenrij  $x_n = \frac{1}{n}$  beeldt het natuurlijk getal  $n \neq 0$  af op zijn omgekeerde. De opeenvolgende beeldpunten van deze getallenrij zijn

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$$



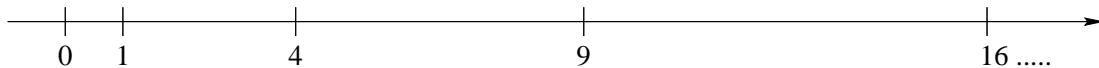
Figuur 14. Grafische voorstelling van de getallenrij  $x_n = \frac{1}{n}$ .

**Voorbeeld 13.** De opeenvolgende elementen uit de getallenrij  $x_n = 2 - \frac{1}{10^n}$  zijn

$$1, 1.9, 1.99, 1.999, \dots$$

**Voorbeeld 14.** De getallenrij  $x_n = n^2$  wordt gevormd door de punten

$$0, 1, 4, 9, 16, \dots$$



Figuur 15. Grafische voorstelling van de getallenrij  $x_n = n^2$ .

**Voorbeeld 15.** De getallenrij  $x_n = (-1)^n$  is van de vorm

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

Het is duidelijk dat de opeenvolgende waarden uit de getallenrij  $x_n = 1/n$  steeds dichter naderen tot het reëel getal 0 (zonder dat ze ooit deze waarde bereiken). We kunnen dit preciezer formuleren als volgt : voor elke gewenste graad van precisie (een maximaal toegelaten afwijking  $\epsilon$  van het getal 0, hoe klein ook gekozen) kunnen we een punt in de getallenrij vinden (een natuurlijk getal  $N$ ) zodat *alle* elementen uit de getallenrij vanaf dit punt (dus alle  $x_n$  met  $n \geq N$ ) minder van 0 afwijken dan de voorgeschreven  $\epsilon$ . Inderdaad, stel bijvoorbeeld  $\epsilon = 0.00001$ , dan weten we dat elke  $x_n$  met  $n \geq 100001$  minder dan  $\epsilon$  van 0 zal afwijken. We zeggen dat de getallenrij  $x_n = \frac{1}{n}$  nadert naar 0, of dat de *limiet van de getallenrij* 0 is, en we noteren dit als  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

In het algemeen zeggen we dat een getallenrij  $x_n$  nadert naar een bepaald getal  $a$ , of dat  $a$  de limiet is van een getallenrij, indien we voor elke  $\epsilon > 0$  een natuurlijk getal  $N$  kunnen vinden zó dat  $|x_n - a| < \epsilon$  voor alle  $n \geq N$ . In formules drukken we dit als volgt uit :  $x_n \rightarrow a$  indien

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \epsilon \text{ voor alle } n \geq N.$$

De opeenvolgende waarden uit de getallenrij  $x_n = n^2$  worden steeds groter in de zin dat we, voor eender welk (willekeurig groot) getal  $M \in \mathbb{R}$  een punt in de getallenrij (een natuurlijk getal  $N$ ) kunnen vinden zodat alle elementen uit de getallenrij vanaf dit punt groter zijn dan  $M$ . Inderdaad, als we bijvoorbeeld  $M = 1000000$  stellen, weten we dat elke  $x_n = n^2$  met  $n > 1000$  een waarde groter dan  $M$  heeft. In dit geval zeggen we dat de getallenrij naar oneindig nadert, of dat de limiet van de getallenrij oneindig is, en we noteren dit met  $x_n \rightarrow +\infty$ . In formules :  $x_n \rightarrow +\infty$  indien

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : x_n > M \text{ voor alle } n \geq N.$$

Op dezelfde manier zeggen we dat de getallenrij naar  $-\infty$  nadert, of  $-\infty$  als limiet heeft, indien

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : x_n < M \text{ voor alle } n \geq N.$$

# HOOFDSTUK 2

## LIMIETEN

### 1. Definities

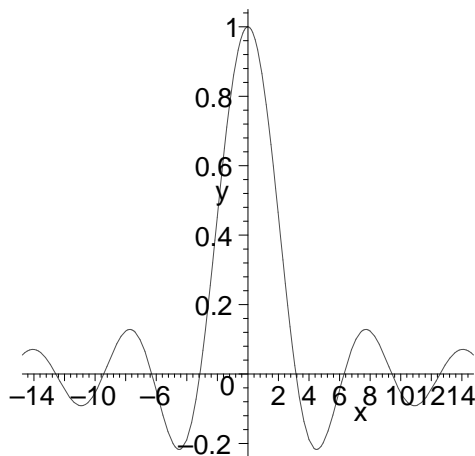
Het is duidelijk dat het reëel getal  $x = 0$  niet behoort tot het domein van de reële functie  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Omdat elk ander reëel getal  $x$  echter wél tot het domein van deze functie behoort, kunnen we nagaan wat het gedrag is van deze functie in de “buurt” van het punt 0. We kiezen daartoe een willekeurige getallenrij  $x_n$  die nadert naar 0 (zonder 0 ooit te bereiken), bijvoorbeeld  $x_n = \frac{1}{10^n}$ . Als we de functiewaarden  $f(x_n)$  van de opeenvolgende waarden van deze getallenrij onder de functie  $f$  berekenen, vinden we volgende resultaten:

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	1	0.8414709
1	$\frac{1}{10}$	0.99833417
2	$\frac{1}{100}$	0.99998333
3	$\frac{1}{1000}$	0.99999983
4	$\frac{1}{10000}$	0.99999999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

We kunnen besluiten dat de getallenrij bestaande uit de beeldpunten  $f(x_n)$  nadert naar het getal 1,  $f(x_n) \rightarrow 1$ . Als we een willekeurige andere getallenrij  $x_n$  kiezen, die opnieuw nadert

naar 0, vinden we hetzelfde resultaat voor de beeldrij  $f(x_n)$ . Alhoewel de functiewaarde voor  $x = 0$  niet gedefinieerd is, kunnen we dus toch een besluit trekken over het gedrag van de functie in de onmiddellijke omgeving van 0: hoe dichter  $x$  naar 0 nadert, hoe dichter  $f(x)$  naar 1 zal naderen. We zeggen dat de limiet van  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , voor  $x$  naderend tot 0, gelijk is aan 1, en we schrijven dit als

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



Figuur 16. Grafiek van de functie  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

**Definitie 1.** De limiet van een functie  $y = f(x)$ , voor  $x$  naderend naar  $a \in \mathbb{R}$ , is gelijk is aan  $b \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

indien voor elke getallenrij  $x_n$  die nadert naar  $a$  (zonder  $a$  ooit te bereiken), de getallenrij van de beeldpunten  $f(x_n)$  nadert naar  $b$ .

Beschouwen we vervolgens de functie  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Opnieuw behoort het reëel getal 0 niet tot het domein van deze functie, maar is de functie gedefinieerd voor elk ander reëel getal. Om het gedrag van deze functie te bestuderen in de buurt van het punt  $x = 0$ , kiezen we opnieuw een willekeurige getallenrij die nadert naar 0 (zonder 0 ooit te bereiken), zoals bijvoorbeeld  $x_n = \frac{1}{n}$ . Het is dan makkelijk na te gaan dat voor elke dergelijke getallenrij  $x_n$  de getallenrij der beeldpunten  $f(x_n)$  nadert naar  $+\infty$ . We zeggen daarom dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

**Definitie 2.** We zeggen dat de limiet van de reële functie  $y = f(x)$ , voor  $x$  naderend naar  $a$ , oneindig is,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty),$$

indien voor elke getallenrij  $x_n$  die nadert naar  $a$ , de getallenrij van de beeldpunten  $f(x_n)$  nadert naar  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

Beschouwen we nu de functie  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Om het gedrag van deze functie te bestuderen voor zeer grote waarden van  $x$  kunnen we een getallenrij  $x_n$  kiezen die nadert naar  $+\infty$ , zoals bijvoorbeeld  $x_n = n$ . Als we de beeldpunten van de elementen van deze getallenrij onder de functie  $f$  berekenen, zien we dat deze rij van beeldpunten nadert naar 0. Als we een willekeurige andere getallenrij kiezen die opnieuw nadert naar  $+\infty$ , zullen we steeds hetzelfde fenomeen waarnemen. We zeggen daarom dat de limiet van  $f(x) = \frac{1}{x}$ , voor  $x$  naderend naar  $+\infty$ , gelijk is aan 0, en we schrijven dit als

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Definitie 3.** Indien voor elke getallenrij  $x_n$  die nadert naar  $+\infty$ , de getallenrij bestaande uit de beeldpunten  $f(x_n)$  nadert naar een zelfde getal  $b$ , zeggen we dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Indien dit het geval is voor elke getallenrij die nadert naar  $-\infty$  zeggen we dat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

**Opmerking.** Met behulp van de bovenstaande definities kan men aantonen dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \sim 2.7182818.$$

Beschouwen we tenslotte de functie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0, \\ 1 & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat de limiet van deze functie voor  $x$  naderend naar 0 niet bestaat omdat niet elke getallenrij van beeldpunten nadert naar hetzelfde getal. Immers, als we de getallenrij  $x_n = \frac{1}{n}$  invullen zien we dat de getallenrij van de beeldpunten nadert naar 1, terwijl we voor de getallenrij  $x_n = -\frac{1}{n}$  een getallenrij bekomen die nadert naar 0. We stellen wel vast dat elke getallenrij die nadert naar 0 en daarbij telkens waarden groter dan 0 aanneemt (d.w.z. als we 0 “langs rechts” naderen) een beeldrij oplevert die naar hetzelfde getal 1 nadert, terwijl elke getallenrij die 0 “langs links” nadert, d.w.z. telkens waarden kleiner dan 0 aanneemt, een beeldrij oplevert die naar 0 nadert.

**Definitie 4.** We zeggen dat de *linkerlimiet* van de functie  $f(x)$ , voor  $x$  naderend naar  $a$ , gelijk is aan  $b$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b,$$

indien voor elke getallenrij  $x_n$  die nadert naar  $a$  en daarbij telkens waarden aanneemt die kleiner zijn dan  $a$ , de getallenrij der beeldpunten  $f(x_n)$  nadert naar  $b$ . Indien dit het geval is voor elke getallenrij die nadert naar  $a$  en daarbij telkens waarden aanneemt die groter zijn dan  $a$ , zeggen we dat de *rechterlimiet* van de functie  $f(x)$ , voor  $x$  naderend naar  $a$ , gelijk is aan  $b$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

We merken op dat de limiet van een functie  $f$ , voor  $x$  naderend naar  $a$ , bijgevolg bestaat wanneer zowel de linker- als de rechterlimiet bestaan, en wanneer deze beide limieten gelijk zijn.

## 2. Rekentechnieken

In de vorige paragraaf hebben we gezien hoe we de limiet van een functie  $y = f(x)$  voor  $x$  naderend naar een getal  $a$  kunnen berekenen met behulp van getallenrijen. Omdat deze rekentechniek, in het algemeen, nogal omslachtig is voor het praktisch uitrekenen van limieten, zullen we nu een aantal rekentechnieken invoeren die het berekenen van deze limieten moeten vergemakkelijken.

Beschouwen we eerst de constante functie  $f(x) = c$ . Dan is het duidelijk uit de hierboven ingevoerde definities dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} c &= c, & \text{voor een willekeurig reëel getal } a, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c &= c. \end{aligned}$$

Beschouwen we vervolgens de identieke functie  $f(x) = x$  en kiezen we opnieuw een willekeurig getal  $a \in \mathbb{R}$ . Toepassen van de definities geeft dan onmiddellijk dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} x &= a, & \text{voor een willekeurig reëel getal } a, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty. \end{aligned}$$

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe we ingewikkelde functies kunnen opbouwen door een aantal constructies uit te voeren met eenvoudige functies. We zullen in wat volgt nagaan hoe we limieten van deze ingewikkelde functies kunnen bepalen door gebruik te maken van de limieten van de eenvoudige componenten.

Stel daarom dat  $f$  en  $g$  twee functies zijn, dat  $a$  een reëel getal of  $\pm\infty$  is, en dat  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  en  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  beide bestaan, dit wil zeggen dat beide limieten reële getallen of  $\pm\infty$  zijn. Als we

nu een nieuwe functie construeren, bijvoorbeeld de som van  $f$  en  $g$ , kunnen we ons afvragen wat de limiet zal zijn van deze functie  $f + g$  voor  $x$  naderend tot  $a$ . We zullen de oplossing van dit probleem, voor de verschillende constructies, formuleren met behulp van een aantal tabellen. In de eerste kolom zetten we hierbij de mogelijke waarden van  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , terwijl we in de eerste rij de mogelijke resultaten voor  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  plaatsen. Indien we de limiet van de geconstrueerde functie kunnen berekenen uit de limieten van  $f$  en  $g$ , zullen we dit resultaat aangeven in de overeenkomstige cellen van de tabel. In sommige gevallen bekommen we echter een zogenaamde *onbepaaldheid*, dit wil zeggen dat de limiet van de geconstrueerde functie niet kan berekend worden uit de limieten van  $f$  en  $g$ . We zullen deze onbepaaldheden in de tabellen aangeven met het symbool  $??$ . Verder in deze tekst zullen we een algemene techniek bestuderen (de regel van de l'Hopital) voor het oplossen van onbepaaldheden bij het berekenen van limieten.

$f + g$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$??(\infty - \infty)$
$-\infty$	$-\infty$	$??(\infty - \infty)$	$-\infty$

$f \cdot g$	$b \in ]-\infty, 0[$	0	$b \in ]0, +\infty[$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in ]-\infty, 0[$	$ab$	0	$ab$	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$??(0 \cdot \infty)$	$??(0 \cdot \infty)$
$a \in ]0, +\infty[$	$ab$	0	$ab$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$??(0 \cdot \infty)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$??(0 \cdot \infty)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\frac{f}{g}$	$b \in \mathbb{R}_0$	0	$\pm\infty$
$a \in \mathbb{R}_0$	$\frac{a}{b}$	$\pm\infty$	0
0	0	$??\frac{0}{0}$	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$??\frac{\infty}{\infty}$

De gevallen  $\frac{a}{0}$  en  $\frac{\infty}{0}$  zijn in zekere zin óók onbepaaldheden. Men weet in deze gevallen dat de limiet  $\pm\infty$  moet zijn, maar het juiste teken kan enkel worden bepaald aan de hand van een tekenonderzoek van de onderzochte functie, en niet uitsluitend op basis van de limieten. In het geval  $\frac{\infty}{b}$  kunnen we het teken van de limiet wél bepalen aan de hand van de limieten van de teller en noemer, en deze gevallen vormen dus geen onbepaaldheden.

Om de limiet van een samengestelde functie  $g \circ f$  te berekenen beschouwen we tenslotte twee functies  $f$  en  $g$ , en veronderstellen we dat  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Dan is het eenvoudig in te zien dat

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x).$$

In het bijzonder volgt hieruit dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)},$$

tenminste indien deze uitdrukking zin heeft.

Praktisch betekenen deze resultaten dat we de meeste limieten kunnen berekenen door de limietwaarde in te vullen in de gegeven functie, waarbij we de tabellen als rekenregels beschouwen voor het werken met reële getallen en  $\pm\infty$ . We kunnen deze methode toepassen zolang er geen onbepaaldheden opduiken tijdens onze berekeningen.

**Voorbeeld 1.** Beschouw de functie  $f(x) = x^2 + 5x + 3$ . Gebruik makend van de rekenregels uit bovenstaande tabellen (en de limieten die we reeds hebben uitgerekend) vinden we dat

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 3 = 17.$$

**Voorbeeld 2.** Beschouwen we nu de functie  $f(x) = x^3 + 5x + 2$ . Het is dan duidelijk dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + (+\infty) + 2 = +\infty.$$

**Voorbeeld 3.** Op dezelfde manier kunnen we berekenen dat

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

**Voorbeeld 4.** Tenslotte zien we ook dat

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0} = \infty.$$

Om het teken van de limiet te bepalen onderzoeken we vervolgens het teken van de beeldpunten onder de functie  $f$  van de punten in de omgeving van 2. We zien dat

$x$		-2		2	
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-		+

en we besluiten dat

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

**Voorbeeld 5.** Anderzijds vinden we dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 5} = \frac{+\infty}{+\infty^2 + 5} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

wat een onbepaaldheid oplevert.

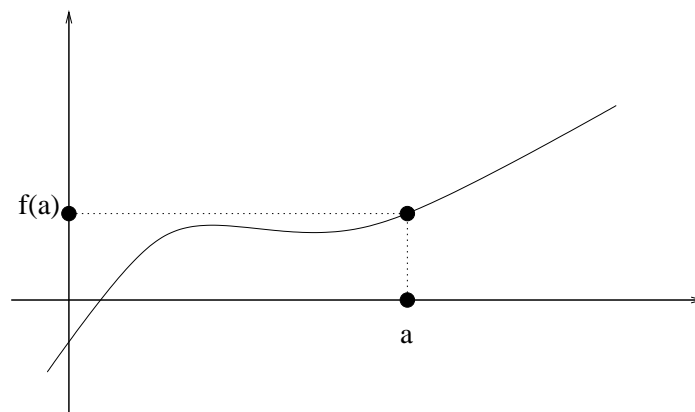


# HOOFDSTUK 3

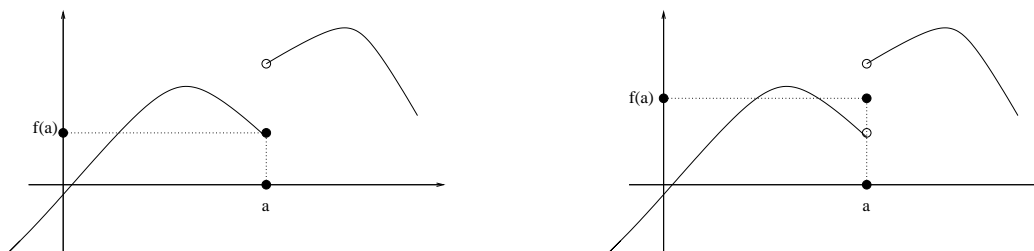
## CONTINUÏTEIT

### 1. Definities

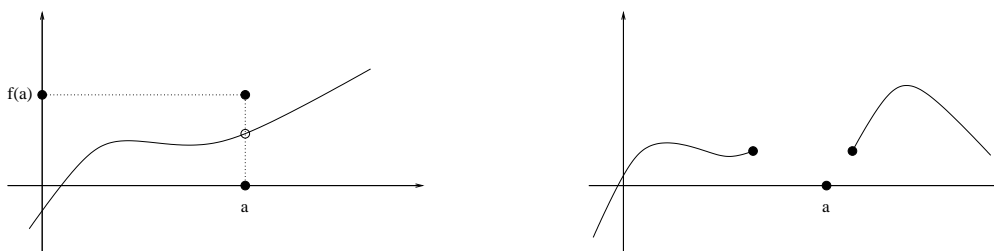
Intuïtief zeggen we dat een functie *continu* is als de grafiek van deze functie een ononderbroken lijn vormt, dit wil zeggen dat deze grafiek geen gaten of sprongen vertoont. Dit intuïtieve beeld wordt duidelijk op de volgende tekeningen van functies die continu zijn en andere die niet continu zijn.



Figuur 17. *De functie  $f$  is continu in  $a$ .*



Figuur 18. Grafieken van functies die niet continu zijn.



Figuur 19. Andere functies die niet continu zijn.

Een grondige studie van de eigenschappen van de bovenstaande voorbeelden leidt ons tot de volgende definitie.

**Definitie 1.** Een reële functie  $y = f(x)$  is *continu* in het punt  $a \in \mathbb{R}$  indien

1.  $a \in \text{dom}(f)$ , dus  $f(a)$  bestaat (er is geen gat in de grafiek in het punt  $a$ );
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bestaat (de functie maakt geen sprong in het punt  $a$ );
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

De functie is *discontinu* in het punt  $a$  indien ze niet continu is in het punt  $a$ . We zeggen dat de functie *linkscontinu* is indien we de bovenstaande eigenschappen enkel hebben voor de linkerlimiet, en *rechtscontinu* indien deze eigenschappen gelden voor de rechterlimiet. We zeggen tenslotte dat  $f$  een *continue functie* is indien  $f$  continu is in elk punt  $a$  van het domein, behalve in de randpunten van dit domein, waar  $f$  links- of rechtscontinu moet zijn.

## 2. Eigenschappen van continue functies

Het volgende resultaat is eenvoudig te bewijzen door gebruik te maken van eigenschappen van limieten en van de definitie van continuïteit.

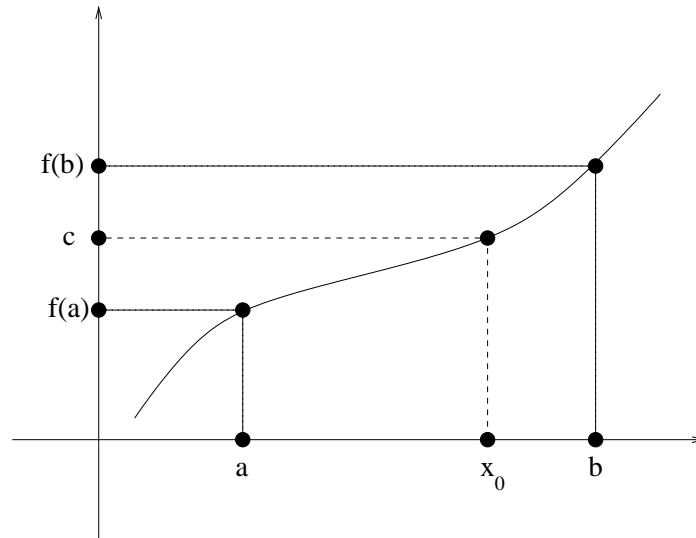
**Stelling 1.** Stel dat de functies  $f$  en  $g$  continu zijn in het punt  $a \in \mathbb{R}$ . Dan zijn de functies  $f + g$ ,  $f - g$  en  $f \cdot g$  opnieuw continu in het punt  $a$ . Verder is de functie  $\frac{f}{g}$  continu in  $a$  indien  $g(a) \neq 0$ .

We eindigen dit hoofdstuk met het vermelden van een aantal zeer interessante eigenschappen van continue functies, waarvan het bewijs echter vrij moeilijk is en daarom wordt weggelaten.

**Stelling 2. (Middelwaardenstelling)** *Stel dat de functie  $f$  continu is op het interval  $[a, b]$ . Dan kunnen we voor elke waarde  $c \in ]f(a), f(b)[$  een getal  $x_0 \in ]a, b[$  vinden waarvoor geldt dat*

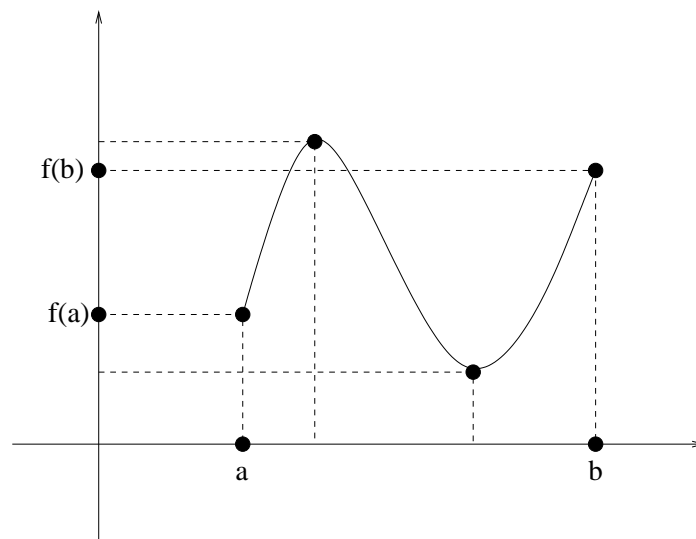
$$f(x_0) = c.$$

*In het bijzonder volgt hieruit dat, als  $f(a)$  en  $f(b)$  verschillen van teken, de functie  $f$  een nulpunt zal hebben in het interval  $]a, b[$ .*



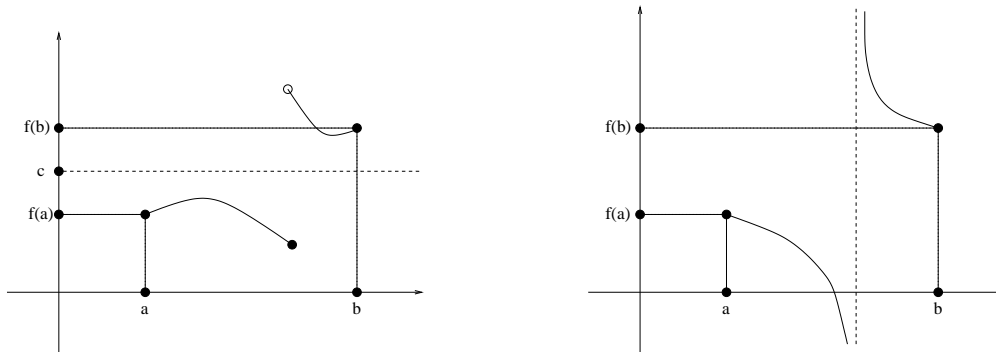
Figuur 20. Een illustratie van de middelwaardenstelling.

**Stelling 3.** *Een functie  $f$  die continu is op een interval  $[a, b]$  bereikt in dit interval een maximale en een minimale waarde.*



Figuur 21. Een continue functie bereikt een maximum en een minimum.

Het is belangrijk dat in deze stellingen geëist wordt dat  $f$  continu is op het interval  $[a, b]$ . Figuur 22 toont aan dat, indien  $f$  niet continu is, niet alle waarden tussen  $f(a)$  en  $f(b)$  bereikt worden, en dat een functie  $f$  die niet continu is geen minimum of maximum hoeft te bereiken.



Figuur 22. *Functies zonder minimum of maximum.*

# HOOFDSTUK 4

## AFGELEIDEN

### 1. Afgeleide van een reële functie

**Definitie 1.** Stel dat  $y = f(x)$  een reële functie is die continu is in het punt  $a \in \text{dom}(f)$ . De afgeleide van de functie  $y = f(x)$  in het punt  $a$  wordt gegeven door

$$f'(a) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta) - f(a)}{\Delta},$$

indien deze limiet bestaat. Indien de linkerlimiet

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^-} \frac{f(a + \Delta) - f(a)}{\Delta}$$

bestaat noemen we deze limiet de linkerafgeleide van  $f$  in het punt  $a$ , en indien de rechterlimiet bestaat spreken we van de rechterafgeleide van  $f$  in  $a$ .

**Voorbeeld 1.** Beschouw de functie  $y = x^2$  en het punt  $a = 1$ . Dan is het duidelijk dat

$$f(a) = 1, \quad f(a + \Delta) = 1 + 2\Delta + \Delta^2,$$

en dus zien we dat

$$f'(1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 + 2\Delta + \Delta^2 - 1}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2 + \Delta = 2.$$

**Definitie 2.** Indien we met elk punt  $a \in \text{dom}(f)$  de afgeleide van  $y = f(x)$  in het punt  $a$  associëren, bekommen we een nieuwe functie  $y = f'(x)$  die we de afgeleide functie van  $f$  noemen. We zullen deze afgeleide functie meestal noteren met  $f'$ ,  $y'$  of  $\frac{dy}{dx}$ .

**Voorbeeld 2.** Beschouw opnieuw de functie  $y = x^2$ . De afgeleide van deze functie in het punt  $x$  is dan gegeven door

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^2 - x^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (2x + \Delta) = 2x,$$

en dus is de afgeleide functie gegeven door  $y = 2x$ .

**Voorbeeld 3.** Beschouw nu de functie  $y = \frac{1}{x}$ . Dan zien we dat

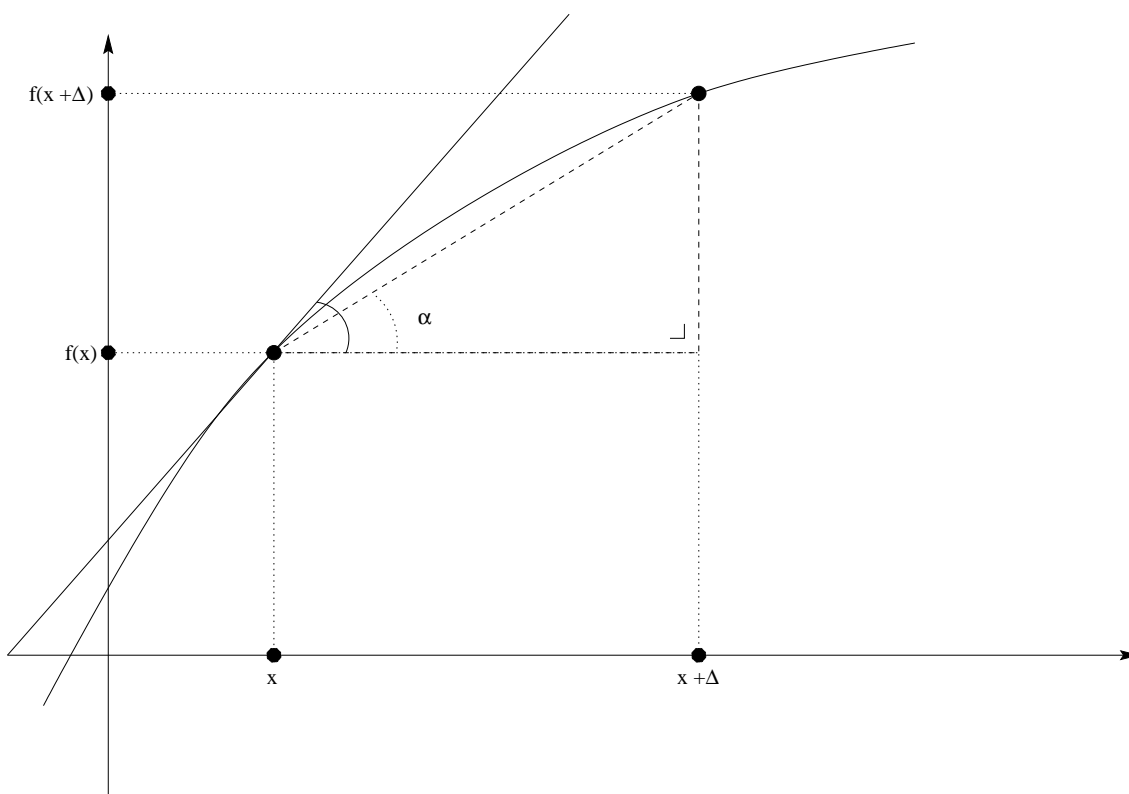
$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta} - \frac{1}{x}}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-\Delta}{x(x + \Delta)\Delta} = -\frac{1}{x^2}.$$

## 2. Meetkundige betekenis

In Figuur 23 is duidelijk te zien dat het quotiënt

$$\frac{f(a + \Delta) - f(a)}{\Delta}$$

overeenkomt met de tangens  $\text{tg}(\alpha)$  van de hoek  $\alpha$ . Als we de toename  $\Delta$  kleiner maken, zien we dat de rechte door de twee punten  $(a, f(a))$  en  $(a + \Delta, f(a + \Delta))$  nadert naar de *raaklijn* aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(a, f(a))$ . We kunnen besluiten dat de afgeleide van  $f$  in het punt  $a$  gelijk is aan de tangens van de hoek tussen de raaklijn en de  $x$ -as of, equivalent hiermee, aan de *richtingscoëfficiënt* van de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(a, f(a))$ .



Figuur 23. Meetkundige betekenis van de afgeleide.

### 3. Afgeleiden van machtsfuncties

In deze paragraaf berekenen we de afgeleiden van een aantal machtsfuncties.

We beschouwen eerst de constante functie  $y = c$ . Het is dan duidelijk dat de afgeleide functie van deze functie gegeven wordt door

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta} = 0.$$

Voor de identieke functie  $y = x$  vinden we dat

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x + \Delta - x}{\Delta} = 1.$$

We hebben reeds eerder aangetoond dat de afgeleide functie van  $y = x^2$  gegeven wordt door  $f'(x) = 2x$ .

**Stelling 1.** *Voor elk natuurlijk getal  $n$  wordt de afgeleide functie van de machtsfunctie  $f(x) = x^n$  gegeven door*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

**Bewijs.** De afgeleide van  $y = x^n$  wordt gegeven door

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^n - x^n}{\Delta}.$$

Het is eenvoudig in te zien dat

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

en we vinden dus dat

$$(x + \Delta)^n - x^n = \Delta((x + \Delta)^{n-1} + \dots + x^{n-1}).$$

Invullen in de bovenstaande limiet levert ons dan dat

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} ((x + \Delta)^{n-1} + \dots + x^{n-1}) = x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

■

We merken op dat deze formule voor de afgeleide van een machtsfunctie geldig blijft indien we machtsfuncties met een willekeurig reëel getal  $a$  als exponent beschouwen. (Voor  $a = -1$  stelden we reeds vast dat  $(x^{-1})' = -x^{-2}$ .)

## 4. Rekenregels

We hebben eerder gezien dat een groot aantal functies kunnen opgebouwd worden uit elementaire functies. We gaan nu na hoe we de afgeleiden van dergelijke samengestelde functies kunnen berekenen, uitgaande van de afgeleiden van hun componenten.

**Stelling 2.** *Stel dat de functies  $f$  en  $g$  afleidbaar zijn in het punt  $x$ , d.w.z. dat de afgeleide van beide functies bestaat in het punt  $x$ . Dan is*

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\(f - g)'(x) &= f'(x) - g'(x), \\(f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

**Bewijs.** Voor het berekenen van de afgeleide van een som merken we op dat

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + \Delta) - (f + g)(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} + \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \\ &= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

De afgeleide functie van een verschil van twee functies kan op dezelfde manier berekend worden.

Vervolgens berekenen we de afgeleide van het produkt van twee functies.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x + \Delta) - (f \cdot g)(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta)g(x + \Delta) - f(x)g(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta)g(x + \Delta) - f(x)g(x + \Delta) + f(x)g(x + \Delta) - f(x)g(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} g(x + \Delta) + f(x) \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow 0} g(x + \Delta) + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$



Om de afgeleide van een quotiënt van twee functies te berekenen gaan we als volgt te werk.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{g}(x + \Delta) - \frac{f}{g}(x)}{\Delta} \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta)g(x) - f(x)g(x + \Delta)}{\Delta g(x + \Delta)g(x)} \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + \Delta)}{\Delta g(x)g(x + \Delta)} \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} \frac{g(x)}{g(x)g(x + \Delta)} - \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \frac{f(x)}{g(x)g(x + \Delta)} \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(x)}{g(x)g(x + \Delta)} \\
 &\quad - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)g(x + \Delta)} \\
 &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
 \end{aligned}$$

■

**Stelling 3. (De kettingregel)** *Stel dat de functie  $f$  afleidbaar is in  $x$  en dat  $g$  afleidbaar is in het punt  $f(x)$ . Dan is*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

**Bewijs.** Omdat

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta},$$

zien we onmiddellijk dat

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f'(x) - \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} = 0,$$

en bijgevolg is

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} + \alpha,$$

met  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \alpha = 0$ , en dus

$$f(x + \Delta) = f(x) + \Delta(f'(x) - \alpha).$$

Op dezelfde manier vinden we dat

$$g(f(x) + \Delta) = g(f(x)) + \Delta(g'(f(x)) - \beta),$$

waarbij  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \beta = 0$ .

We zien nu onmiddellijk dat

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + \Delta) - (g \circ f)(x) &= g(f(x + \Delta)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + \Delta(f'(x) - \alpha)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x)) + \Delta(f'(x) - \alpha)(g'(f(x)) - \beta) - g(f(x)) \\ &= \Delta(f'(x) - \alpha)(g'(f(x)) - \beta),\end{aligned}$$

en bijgevolg is

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta) - (g \circ f)(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} (f'(x) - \alpha)(g'(f(x)) - \beta) \\ &= g'(f(x))f'(x).\end{aligned}$$

■

**Voorbeeld 4.** De functie  $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$  is de samenstelling  $g \circ f$  van de functies  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  en  $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ . We weten dat

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 2x + 3,$$

en bijgevolg is

$$(g \circ f)'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$$

Als we de kettingregel toepassen op de samenstelling van machtsfuncties met een willekeurige functie  $f(x)$  zien we dadelijk dat

$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x).$$

## 5. Afgeleiden van goniometrische functies

**Stelling 4.** De afgeleide functies van de elementaire goniometrische functies worden gegeven door

$$\begin{aligned}f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x), \\ f(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(x) = -\sin(x), \\ f(x) = \operatorname{tg}(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\ f(x) = \operatorname{cotg}(x) &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.\end{aligned}$$

**Bewijs.** Stel eerst dat  $f(x) = \sin(x)$ . Dan is het duidelijk dat

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta) - \sin(x)}{\Delta}.$$

We weten echter dat

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right),$$

en we zien dus dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta}{2}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) \\ &= 1 \cos(x). \end{aligned}$$

De afgeleide functie van  $f(x) = \cos(x)$  wordt op dezelfde wijze berekend, gebruik makend van de formule

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

We vinden dan dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta) - \cos(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \\ &= - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta}{2}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) \\ &= - \sin(x). \end{aligned}$$

Om de afgeleide functie van  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  te berekenen, merken we op dat

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

en dat bijgevolg

$$(\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)(\sin(x))' - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Omdat  $\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$  volgt uit de kettingregel dat

$$(\operatorname{cotg}(x))' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2(x)} (\operatorname{tg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

■

## 6. Afgeleiden van cyclometrische functies

**Stelling 5.** De afgeleide functies van de cyclometrische functies worden gegeven door

$$\begin{aligned} f(x) = \arcsin(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f(x) = \arccos(x) &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f(x) = \operatorname{arctg}(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ f(x) = \operatorname{arccotg}(x) &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

**Bewijs.** Voor het berekenen van de afgeleide functie van  $f(x) = \arcsin(x)$  merken we op dat

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

Als we beide leden van deze gelijkheid afleiden naar  $x$  volgt uit de kettingregel onmiddellijk dat

$$\cos(\arcsin(x))(\arcsin(x))' = 1,$$

en dus

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

De stelling van Pythagoras leert ons dat voor elke hoek  $\alpha$  geldt dat

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1,$$

en bijgevolg is

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}.$$

Omdat de boogsinus altijd gekozen wordt tussen  $-\frac{\pi}{2}$  en  $\frac{\pi}{2}$  weten we dat de cosinus van een dergelijke hoek steeds positief is. Bijgevolg is

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2},$$

en dus

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Voor de afgeleide functie van  $\arccos(x)$  vinden we op dezelfde manier dat

$$\cos(\arccos(x)) = x.$$

Bijgevolg is

$$-\sin(\arccos(x))(\arccos(x))' = 1,$$

en dus

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Voor de afgeleide functie van  $\arctg(x)$  vertrekken we van het feit dat

$$\operatorname{tg}(\arctg(x)) = x,$$

en dus

$$\frac{1}{\cos^2(\arctg(x))}(\arctg(x))' = 1,$$

of

$$(\arctg(x))' = \cos^2(\arctg(x)).$$

Het is echter duidelijk dat

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}^2(x) + 1.$$

Bijgevolg is

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x)}$$

en dus vinden we dat

$$(\arctg(x))' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\arctg(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Om de afgeleide functie van  $\operatorname{arccotg}(x)$  te berekenen gaan we op dezelfde manier te werk. We vertrekken van

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}(x)) = x,$$

en dus

$$-\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccotg}(x))}(\operatorname{arccotg}(x))' = 1,$$

of

$$(\operatorname{arccotg}(x))' = -\sin^2(\operatorname{arccotg}(x)).$$

Opnieuw is het duidelijk dat

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \operatorname{cotg}^2(x) + 1.$$

Bijgevolg is

$$\sin^2(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2(x)}$$

en dus vinden we dat

$$(\operatorname{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg}(x))} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

■

## 7. Afgeleiden van logaritmische en exponentiële functies

**Stelling 6.** De afgeleide functies van de logaritmische en exponentiële functies worden gegeven door

$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)},$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a).$$

In het geval waar het grondtal  $a = e$  vinden we dat

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

**Bewijs.** Stel eerst dat  $f(x) = \log_a(x)$ . Dan vinden we uit de definitie van de afgeleide en de eigenschappen van de logaritmische functie onmiddellijk dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta) - \log_a(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta}{x}\right)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \log_a\left(\left(1 + \frac{\Delta}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta}}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \log_a\left(\left(1 + \frac{\Delta}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta}}\right) \\ &= \frac{1}{x} \log_a\left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta}}\right) \\ &= \frac{1}{x} \log_a(e). \end{aligned}$$

Zoals we reeds hebben opgemerkt geldt dat

$$\ln(a) = \frac{1}{\log_a(e)},$$

en bijgevolg is

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Toepassen van deze formule in het geval  $a = e$  levert ons dan dat

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(e)} = \frac{1}{x}.$$

Voor het berekenen van de afgeleide functie van  $f(x) = a^x$  merken we op dat

$$\log_a(a^x) = x.$$

Afleidende van beide zijden van deze gelijkheid geeft dan dat

$$\frac{1}{a^x \ln(a)} (a^x)' = 1,$$

en dus dat

$$(a^x)' = a^x \ln(a).$$

Opnieuw levert toepassing van deze formule in het speciale geval  $a = e$  ons dat

$$(e^x)' = e^x \ln(e) = e^x.$$

■

## 8. Logaritmisch afleiden

**Stelling 7.** *Stel dat  $y = f(x)$  een reële functie is. Dan is*

$$f'(x) = f(x)(\ln(f(x)))'.$$

**Bewijs.** Omdat  $e^{\ln(a)} = a$  voor elk (positief) reëel getal  $a$  kunnen we schrijven dat

$$f(x) = e^{\ln(f(x))}.$$

Beide zijden van deze gelijkheid afleiden naar  $x$  en toepassen van de kettingregel geeft dan dat

$$f'(x) = e^{\ln(f(x))} (\ln(f(x)))' = f(x)(\ln(f(x)))'.$$

■

De techniek die in deze stelling gebruikt wordt voor het berekenen van  $f'(x)$  uit de logaritme van  $f(x)$  wordt *logaritmisch afleiden* of *logaritmisch differentiëren* genoemd. Deze techniek wordt vooral gebruikt bij het afleiden van functies van de vorm  $f(x)^{g(x)}$ . Men kan de techniek ook gebruiken voor het afleiden van produkten van verschillende factoren.

**Voorbeeld 5.** De afgeleide functie van  $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)}$  wordt gegeven door

$$f'(x) = x^x (\ln(x^x))' = x^x (x \ln(x))' = x^x (\ln(x) + x \frac{1}{x}) = x^x (\ln(x) + 1).$$

**Voorbeeld 6.** Om de functie  $f(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x$  af te leiden merken we eerst op dat

$$\ln(f(x)) = 2 \ln x + 2x + \ln \cos 3x,$$

en dus is

$$(\ln(f(x)))' = \frac{2}{x} + 2 - 3 \operatorname{tg} 3x.$$

De afgeleide functie wordt bijgevolg gegeven door

$$f'(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x \left( \frac{2}{x} + 2 - 3 \operatorname{tg} 3x \right).$$

## 9. Hogere afgeleiden

Stel dat  $y = f(x)$  een reële functie is. Als de afgeleide functie  $y = f'(x)$  bestaat en opnieuw een afgeleide functie heeft, noemen we deze functie de *tweede afgeleide* van  $f(x)$  en we noteren deze functie met  $y''$ ,  $f''$  of  $\frac{d^2 f}{dx^2}$ . Als deze tweede afgeleide van  $f(x)$  opnieuw een afgeleide functie heeft noemen we deze de *derde afgeleide* van  $f$ , en noteren we die met  $f'''$ ,  $y'''$  of  $\frac{d^3 f}{dx^3}$ .

**Definitie 3.** Voor elk natuurlijk getal  $n > 0$  zeggen we dat de  $n$ -de afgeleide  $f^{(n)}$  van een functie  $y = f(x)$  de afgeleide functie is van de  $(n - 1)$ -ste afgeleide functie van  $f$ .

**Voorbeeld 7.** De volgende tabel geeft een overzicht van de eerste zeven afgeleide functies van de functies  $y = 2x^5 + 5x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 5$  en  $y = \sin(2x)$ .

$f(x)$	$2x^5 + 5x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 5$	$\sin(2x)$
$f'(x)$	$10x^4 + 20x^3 + 3x^2 + 6x + 2$	$2 \cos(2x)$
$f''(x)$	$40x^3 + 60x^2 + 6x + 6$	$-4 \sin(2x)$
$f'''(x)$	$120x^2 + 120x + 6$	$-8 \cos(2x)$
$f^{(4)}(x)$	$240x + 120$	$16 \sin(2x)$
$f^{(5)}(x)$	240	$32 \cos(2x)$
$f^{(6)}(x)$	0	$-64 \sin(2x)$
$f^{(7)}(x)$	0	$-128 \cos(2x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

## 10. Impliciet afleiden

We hebben tevoren reeds gezien dat de afgeleide van een functie  $y = f(x)$  in een punt  $a$  de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie in dat punt aangeeft.

Een kromme in het vlak kan dikwijls worden beschreven door middel van een uitdrukking van de vorm  $F(x, y) = 0$ , die een *impliciete vergelijking* van de kromme wordt genoemd. De punten van de kromme zijn dan die punten in het vlak waarvan de  $x$  en  $y$  coördinaten voldoen aan de vergelijking  $F(x, y) = 0$ .



**Voorbeeld 8.** De vergelijking

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

beschrijft een cirkel met middelpunt  $(0, 0)$  en straal 1. Het punt  $(2, 2)$  ligt niet op de cirkel omdat  $F(2, 2) = 7 \neq 0$ , terwijl het punt  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  wel op de kromme ligt omdat

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

Stel nu dat  $F(x, y) = 0$  de impliciete vergelijking is van een kromme en dat  $(a, b)$  een punt is van deze kromme. Om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in het punt  $(a, b)$  te berekenen gebruiken we een techniek die *impliciet afleiden* wordt genoemd. We leiden hierbij de uitdrukking  $F(x, y) = 0$  af naar  $x$ , en veronderstellen hierbij dat  $y$  een functie van  $x$  is. Gebruik makend van de kettingregel vinden we een uitdrukking waaruit we  $y'$  kunnen oplossen als functie van  $x$  en  $y$ . Invullen van de coördinaten van het punt  $(a, b)$  geeft het gewenste resultaat.

**Voorbeeld 9.** Om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de cirkel

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

te berekenen in het punt  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , leiden we eerst de vergelijking van de cirkel af naar  $x$ . We bekommen dan

$$2x + 2yy' = 0,$$

en dus is

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het gegeven punt is bijgevolg gelijk aan  $-1$ .

**Voorbeeld 10.** Stel gegeven de kromme  $x^2 - xy + y^2 = 3$ . Afleiden van deze vergelijking geeft dat

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0,$$

en dus is

$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}.$$

Om de hogere afgeleiden te vinden leiden we de uitdrukking  $F(x, y) = 0$  meerdere keren af, en gaan dan op dezelfde manier te werk als hierboven.

**Voorbeeld 11.** Beschouw opnieuw de kromme  $x^2 - xy + y^2 = 3$ . De tweede afgeleide van deze uitdrukking is van de vorm

$$2 - 2y' + 2(y')^2 - xy'' + 2yy'' = 0.$$

Als we de uitdrukking voor  $y'$  hierin substitueren vinden we

$$y'' = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3} = \frac{18}{(x - 2y)^3}.$$

## 11. De differentiaal van een functie

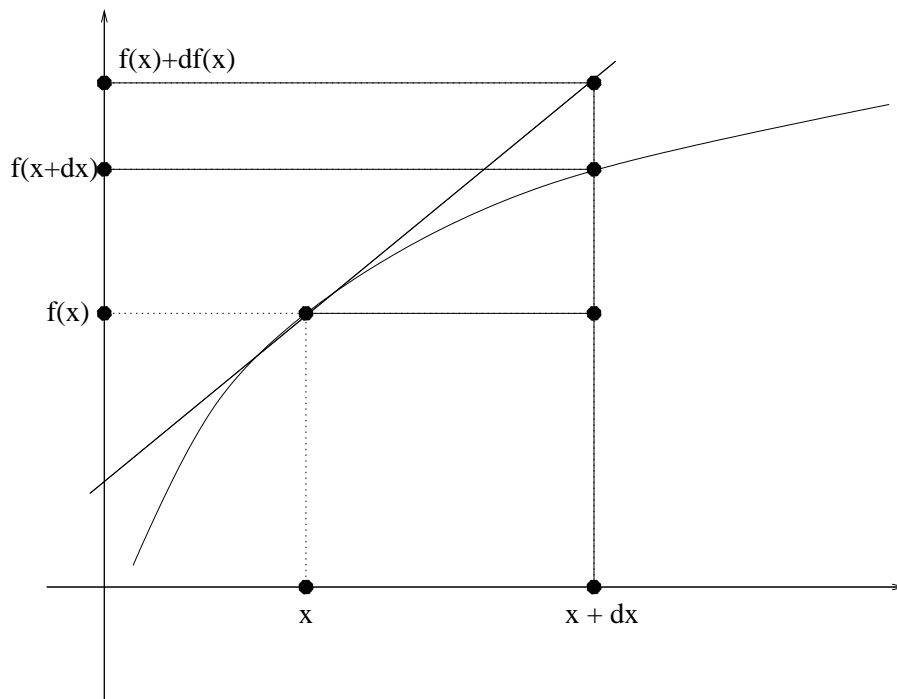
**Definitie 4.** De differentiaal  $df$  van een afleidbare functie  $f(x)$  wordt gegeven door

$$df(x) = f'(x)dx.$$

De meetkundige betekenis van de differentiaal wordt duidelijk uit de volgende figuur. Indien we een kleine toename  $dx$  van  $x$  beschouwen, geeft

$$df(x) = f'(x)dx$$

de toename in  $y$  weer als we de raaklijn aan de grafiek beschouwen. Alhoewel de toename  $df(x)$ , voor kleine waarden van  $dx$ , zeer dicht zal naderen tot de toename  $f(x + dx) - f(x)$ , is er wel een essentieel verschil tussen deze twee waarden.



Figuur 24. De meetkundige betekenis van de differentiaal van een functie  $f(x)$ .

Omdat, voor kleine toenames  $dx$ , de differentiaal  $df(x)$  een goede benadering vormt voor het verschil  $f(x + dx) - f(x)$ , kunnen we differentiaal gebruiken voor het afschatten van de functiewaarde  $f(x)$  van een punt  $x$ . Stel dat we  $f(x_0)$  en  $df(x_0)$  kennen voor een bepaald punt  $x_0$ . Dan kunnen we de functiewaarde  $f(x_0 + dx)$  benaderen door

$$f(x_0 + dx) \sim f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

**Voorbeeld 12.** De differentiaal van de functie  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  wordt gegeven door  $df(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$ . We kunnen bijgevolg stellen dat

$$\sqrt[3]{126} \sim \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3(\sqrt[3]{125})^2}1 = 5 + \frac{1}{75} = 5.0133333.$$

Ter vergelijking: de werkelijke waarde van  $\sqrt[3]{126}$  wordt gegeven door 5.0132979 en de fout op onze afchatting is dus kleiner dan 0.00004.

**Voorbeeld 13.** Beschouwen we een kubus met een zijde van  $r$  cm, dan wordt het volume van de kubus gegeven door  $V(r) = r^3$ . Bij een toename van de zijde met 1%,  $dr = \frac{1}{100}r$ , vinden we een toename van het volume met *ongeveer*

$$dV = 3r^2dr = \frac{3}{100}r^3.$$

**Voorbeeld 14.** Beschouwen we een bol met een straal  $r$  van 1 meter, die we overdekken met een laag kunststof van 1 cm. Het volume van een bol met straal  $r$  wordt gegeven door  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Als we een toename  $dr$  van de straal met 1 cm beschouwen, zal de toename van het volume daarom *bij benadering* gelijk zijn aan

$$dV = 4\pi r^2dr = 4\pi 100^2 \text{ cm}^3.$$



# HOOFDSTUK 5

## TOEPASSINGEN VAN AFGELEIDEN

### 1. Variatie van een functie

#### 1. Verloop van een reële functie

**Definitie 1.** *Stel dat  $f$  een continue functie is en  $x_0$  een punt uit het domein van  $f$ . We zeggen dat  $f$  stijgend is in  $x_0$  indien voor elke voldoende kleine, positieve waarde van  $\Delta$  geldt dat*

$$f(x_0 - \Delta) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta).$$

*We zeggen dat  $f$  dalend is in  $x_0$  indien*

$$f(x_0 - \Delta) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta)$$

*voor dezelfde waarden van  $\Delta$ .*

**Stelling 1.** *Stel dat de reële functie  $f$  afleidbaar is in  $x_0$ . Indien  $f'(x_0) > 0$ , dan is  $f$  stijgend in  $x_0$ . Indien  $f'(x_0) < 0$  dan is  $f$  dalend in  $x_0$ .*

**Bewijs.** Stel eerst dat  $f'(x_0) > 0$ . Dan weten we dat

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} > 0$$

en bijgevolg geldt voor alle voldoende kleine waarden van  $\Delta$  dat

$$\frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \alpha > 0.$$

Kies nu een willekeurige  $\Delta > 0$ . Dan volgt onmiddellijk uit voorgaande uitdrukking dat

$$f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = \alpha\Delta > 0,$$

en dus is  $f(x_0 + \Delta) > f(x_0)$ . Anderzijds volgt uit dezelfde uitdrukking ook dat

$$f(x_0 - \Delta) - f(x_0) = -\Delta\alpha < 0,$$

en dus is  $f(x_0 - \Delta) < f(x_0)$ . Samengevat kunnen we besluiten dat  $f$  stijgend is in  $x_0$ .

Indien  $f'(x_0) < 0$  toont men op dezelfde wijze aan dat

$$f(x_0 - \Delta) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta),$$

en dus dat  $f$  dalend is in  $x_0$ . ■

**Definitie 2.** Indien  $f'(x_0) = 0$  weten we niet of  $f$  stijgend of dalend is in  $x_0$ . We zeggen dan dat  $f$  stationair is in  $x_0$ , en we noemen  $x_0$  een *kritisch punt* van de functie  $f$ .

## 2. Minima en maxima van een functie

**Definitie 3.** De functie  $f$  heeft een *maximum* in  $x_0$  indien voor alle kleine (positieve en negatieve) waarden van  $\Delta$  geldt dat

$$f(x_0 + \Delta) < f(x_0).$$

Indien voor al deze waarden van  $\Delta$  geldt dat

$$f(x_0 + \Delta) > f(x_0),$$

zeggen we dat  $f$  een *minimum* heeft in  $x_0$ .

**Stelling 2.** Stel dat de reële functie  $f$  afleidbaar is in het interval  $[a, b]$  en dat  $f$  een maximum of minimum heeft in het punt  $x_0 \in ]a, b[$ . Dan is  $f'(x_0) = 0$ .

**Bewijs.** Stel dat  $f$  een maximum heeft in het punt  $x_0$ . Dan weten we dat voor alle kleine waarden van  $\Delta$  geldt dat  $f(x_0 + \Delta) < f(x_0)$ . Bijgevolg is voor alle kleine *negatieve* waarden van  $\Delta$  het quotiënt

$$\frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} > 0,$$

terwijl dit quotiënt voor kleine positieve waarden van  $\Delta$  negatief is. We besluiten dat

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} \geq 0, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} \leq 0.$$

Omdat  $f$  afleidbaar is in het punt  $x_0$  moeten de linkerlimiet en de rechterlimiet samenvallen, en we besluiten dat

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = 0.$$

Indien  $f$  een minimum heeft in  $x_0$  kan men op dezelfde wijze aantonen dat  $f'(x_0) = 0$ . ■

**Voorbeeld 1.** De functie  $y = x^2 - 4x + 3$  heeft een minimum in  $x = 2$ . In dit punt is de functie ook stationair.

De vorige stelling zegt dat, indien  $f$  afleidbaar is, minima en maxima enkel voorkomen in punten waar  $f$  stationair is. Indien  $f$  echter niet afleidbaar is, kunnen we ook andere minima en maxima vinden. Deze minima en maxima kunnen dan enkel voorkomen in punten waar de afgeleide niet bestaat, terwijl de functie wel gedefinieerd is in dat punt. We noemen deze punten daarom eveneens *kritische punten* van de functie  $f$ .

**Voorbeeld 2.** De functie  $y = x^{\frac{2}{3}}$  heeft een minimum in  $x = 0$ . De functie is hier echter niet stationair, omdat de afgeleide functie  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  in dit punt niet gedefinieerd is.

### 3. Berekening van minima en maxima met de eerste afgeleide

Om de minima en maxima van een gegeven functie  $y = f(x)$  te bepalen gaan we als volgt te werk:

1. Zoek de kritische punten van de functie, d.w.z. de punten waarin de functie stationair is of waar de eerste afgeleide niet bestaat maar de functie wel gedefinieerd is.
2. Bepaal het teken van de eerste afgeleide in de intervallen tussen de verschillende kritische punten.
3. Indien het teken van de eerste afgeleide rond een kritisch punt verandert van  $+$  in  $-$  is dit punt een maximum. Indien het teken verandert van  $-$  in  $+$  hebben we te maken met een minimum. Indien het teken van  $f'$  niet verandert, is het kritisch punt geen maximum noch een minimum.

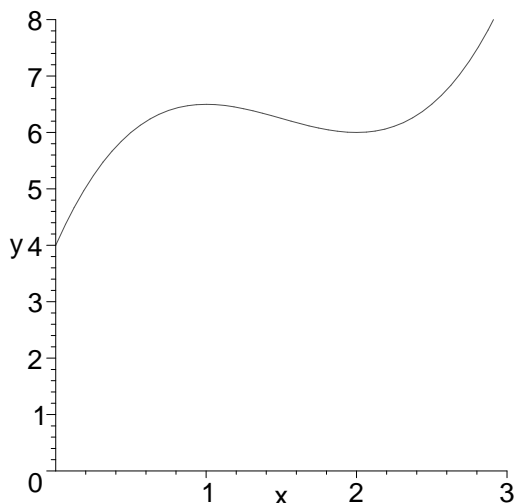
**Voorbeeld 3.** Om de minima en maxima van de functie  $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4$  te berekenen, zoeken we eerst de kritische punten. We lossen hiervoor de vergelijking

$$3x^2 - 9x + 6 = 0$$

op en vinden dat de kritische punten gelegen zijn in  $x = 1$  en  $x = 2$ . Een tekenonderzoek levert dan de volgende resultaten:

$x$		1		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	Max	↘	min	↗

We besluiten dat de functie een maximum heeft in  $x = 1$ . De functiewaarde is dan  $f(1) = \frac{13}{2}$ . De functie heeft verder ook een minimum in  $x = 2$ , waar de functiewaarde gegeven wordt door  $f(2) = 6$ . Figuur 25 geeft de grafiek van deze functie weer.



Figuur 25. Grafiek van de functie  $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4$ .

**Voorbeeld 4.** De kritische punten van de functie  $y = x^3 + 2$  worden gegeven door de vergelijking

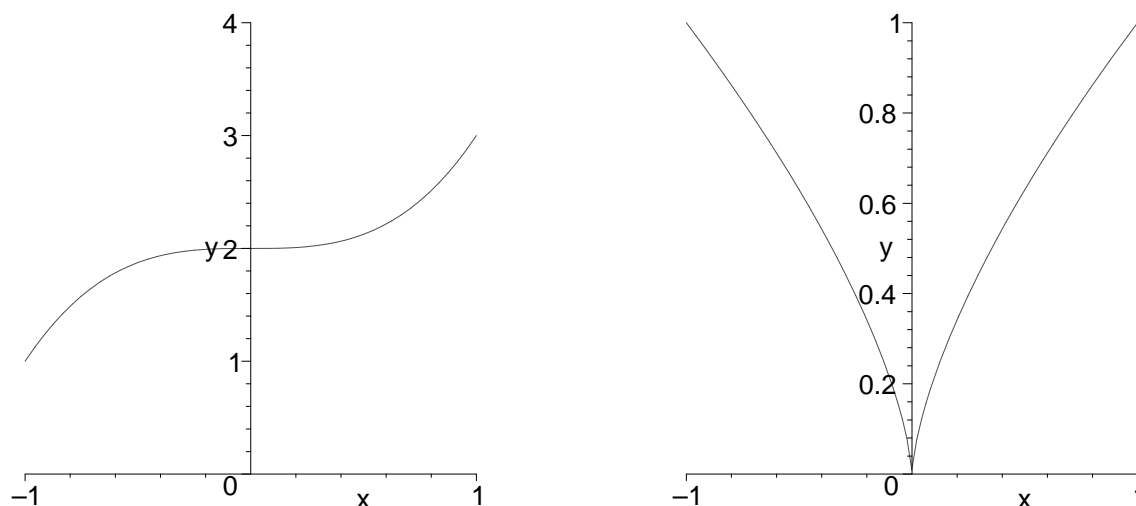
$$3x^2 = 0,$$

en bijgevolg is  $x = 0$  het enige kritische punt van deze functie. Het tekenonderzoek van de eerste afgeleide van deze functie levert ons het volgende resultaat:

$x$		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

We besluiten dat de functie geen maximum of minimum heeft. Dit is ook duidelijk te zien in de grafische voorstelling van de functie in Figuur 26.





Figuur 26. Grafieken van de functies  $y = x^3 + 2$  en  $y = x^{\frac{2}{3}}$ .

**Voorbeeld 5.** Om de kritische punten van de functie  $y = x^{\frac{2}{3}}$  (grafisch voorgesteld in Figuur 26 te berekenen zoeken we de punten waar  $f'(x) = 0$  of waar  $f'(x)$  niet bestaat terwijl  $f$  wel gedefinieerd is in  $x$ . De afgeleide functie  $y = f'(x)$  wordt gegeven door  $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ . Deze functie is niet gedefinieerd in  $x = 0$ , terwijl  $f$  wel gedefinieerd is in  $x = 0$ . Bijgevolg is  $x = 0$  een kritisch punt van  $f$ . Een tekenonderzoek van de afgeleide functie  $f'$  levert het volgende resultaat:

$x$		0	
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

We besluiten dus dat  $x = 0$  een minimum is voor de functie  $f(x)$ . De functiewaarde wordt hier gegeven door  $f(0) = 0$ .

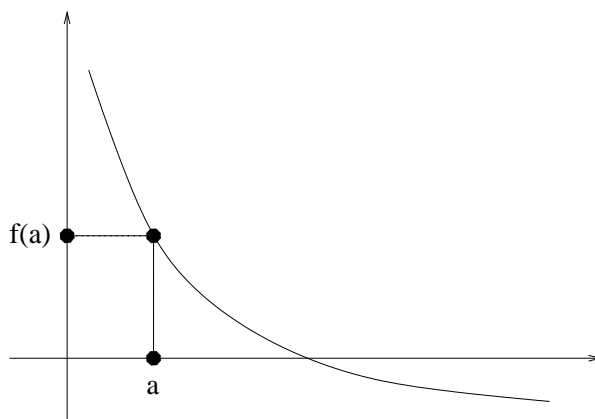
#### 4. De studie van de tweede afgeleide (kromming)

Stel nu dat de tweede afgeleide van de functie  $y = f(x)$  in het punt  $x_0$  positief is. Dan weten we uit het voorgaande dat de eerste afgeleide stijgend is in  $x_0$ , dit wil zeggen dat

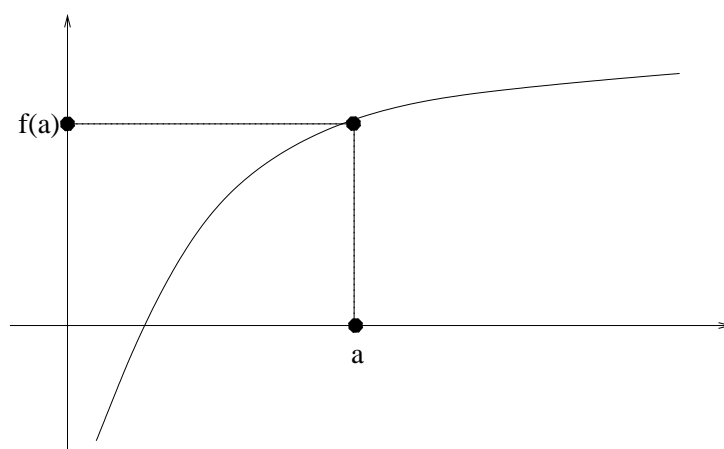
$$f'(x_0 - \Delta) < f'(x_0) < f'(x_0 + \Delta)$$

voor alle kleine positieve waarden van  $\Delta$ . Dit wil zeggen dat de functie  $f(x)$  rechts van het punt  $x_0$  sneller stijgt of minder snel daalt dan links van  $x_0$ . We zeggen dat  $f$  *concaaf* is in het punt  $x_0$ .

Als  $f''(x_0) < 0$  kunnen we op dezelfde manier aantonen dat  $f$  rechts van  $x_0$  sneller daalt of minder snel stijgt dan links van  $x_0$ , en we zeggen dat  $f$  *convex* is in  $x_0$ .



Figuur 27. Een voorbeeld van een concave functie in het punt  $a$



Figuur 28. Een voorbeeld van een convexe functie in het punt  $a$

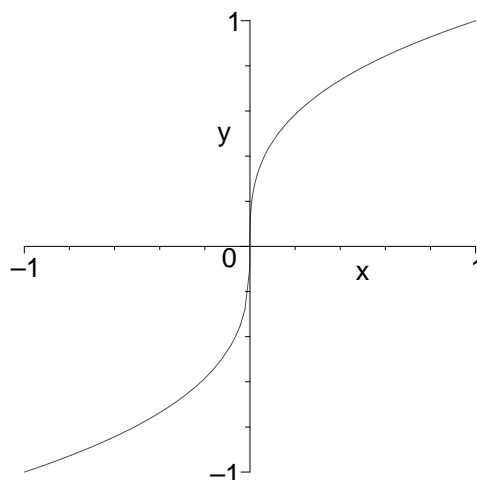
De punten uit het domein van  $f$  waarin het karakter van  $f$  verandert van concaaf naar convex of omgekeerd, d.w.z., waar de tweede afgeleide van teken verandert, noemen we *buigpunten*. Het is duidelijk dat dit enkel kan gebeuren in punten waar de tweede afgeleide nul wordt of waar deze tweede afgeleide niet bestaat maar waar de functie  $f$  wel gedefinieerd is.

**Voorbeeld 6.** De tweede afgeleide van de functie  $y = x^3 + 2$  (Figuur 26) wordt gegeven door

$$f''(x) = 6x.$$

Deze functie verandert van teken in  $x = 0$ , en bijgevolg is  $x = 0$  een buigpunt van deze functie.

**Voorbeeld 7.** De tweede afgeleide van de functie  $y = x^{\frac{1}{3}}$  (Figuur 29) wordt gegeven door  $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ . Het punt  $x = 0$  behoort duidelijk tot het domein van de functie  $f$ . De tweede afgeleide is niet gedefinieerd in  $x = 0$ , alhoewel het teken van de tweede afgeleide wel verandert in  $x = 0$ . Bijgevolg is  $x = 0$  een buigpunt van deze functie. De raaklijn in dit punt is bovendien vertikaal.



Figuur 29. Grafiek van de functie  $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ .

## 5. Berekenen van minima en maxima met de tweede afgeleide

Met behulp van de tweede afgeleide kunnen we nu een alternatieve methode beschrijven voor het zoeken van minima en maxima van een functie.

1. Zoals tevoren beginnen we met het zoeken van alle kritische punten van de functie  $f$ .
2. Vervolgens berekenen we in elk kritisch punt  $x_0$  van  $f$  de waarde  $f''(x_0)$  van de tweede afgeleide in dat punt.
3. Is  $f''(x_0) > 0$  dan bereikt  $f$  een minimum in  $x_0$ , terwijl  $x_0$  een maximum is voor de functie indien  $f''(x_0) < 0$ . In de andere gevallen ( $f''(x_0) = 0$  of niet gedefinieerd) kunnen we geen uitspraak doen over het punt  $x_0$  en moeten we dus de vorige methode toepassen.

**Voorbeeld 8.** De functie  $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4$  (Figuur 25) heeft kritische punten in  $x = 1$  en  $x = 2$ . De tweede afgeleide van deze functie wordt gegeven door

$$f''(x) = 6x - 9,$$

en we zien dus dat  $f''(1) = -3$  en  $f''(2) = 3$ . We besluiten, zoals hierboven, dat  $f$  een maximum heeft in  $x = 1$  en een minimum in  $x = 2$ .

## 2. Vergelijking van de raaklijn en de normaal

Stel dat  $y = f(x)$  een functie is en  $x_0$  een reëel getal dat behoort tot het domein van  $f$ . We hebben reeds gezien dat de afgeleide  $f'(x_0)$  van de functie  $f$  in een punt  $x_0$  (als deze afgeleide bestaat) de richtingscoëfficiënt aangeeft van de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(x_0, f(x_0))$ .

Stel nu dat we de vergelijking van de raaklijn willen berekenen, d.w.z. de voorwaarde waaraan de coördinaten van een punt moeten voldoen om tot deze raaklijn te behoren. Een rechte, die niet vertikaal is, wordt gegeven door een vergelijking van de vorm  $y = mx + q$ , waarbij  $m$  de richtingscoëfficiënt van de rechte is. We zien bijgevolg dat de raaklijn gegeven wordt door

$$y = f'(x_0)x + q,$$

waarbij we het getal  $q$  zo moeten kiezen dat het punt  $(x_0, f(x_0))$  tot de rechte behoort. Dit wil zeggen dat

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + q,$$

en dus

$$q = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

We vinden bijgevolg dat de raaklijn gegeven wordt door de vergelijking

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0f'(x_0),$$

of, indien we  $f(x_0) = y_0$  stellen,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Voorbeeld 9.** Om de raaklijn aan de kromme  $y = x^{\frac{1}{3}}$  in het punt  $(1, 1)$  te berekenen stellen we  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ . We zien dan dat  $f'(x_0) = \frac{1}{3}$  en de raaklijn heeft bijgevolg als vergelijking

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1).$$

Indien de afgeleide in het punt  $a$  oneindig wordt is de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in dat punt vertikaal. In dat geval wordt de vergelijking van de raaklijn gegeven door

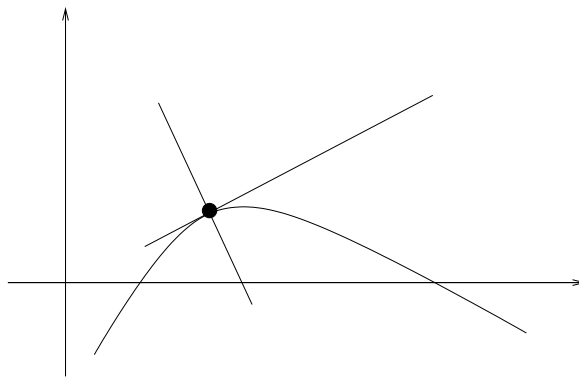
$$x = a,$$

waarbij we  $a$  zo moeten kiezen dat het punt  $(x_0, f(x_0))$  tot de rechte behoort. We zien dan ook onmiddellijk dat de vergelijking van de raaklijn in dit geval gegeven wordt door

$$x = x_0.$$

**Voorbeeld 10.** In het punt  $x_0 = 0$  wordt de afgeleide van de functie  $y = x^{\frac{1}{3}}$  oneindig. Bijgevolg is de raaklijn vertikaal en wordt ze gegeven door de vergelijking

$$x = 0.$$



Figuur 30. *De raaklijn en de normaal in een punt.*

De *normaal* op de grafiek in een punt  $(x_0, y_0)$  is de rechte die loodrecht staat op de raaklijn in dat punt. Indien de raaklijn vertikaal is, volgt onmiddellijk dat de normaal horizontaal is en bijgevolg een vergelijking heeft van de vorm

$$y = y_0.$$

In het geval dat de raaklijn horizontaal is (dus richtingscoëfficiënt gelijk aan nul heeft) wordt de normaal vertikaal en heeft die een vergelijking van de vorm

$$x = x_0.$$

Indien de raaklijn vertikaal noch horizontaal is, is de richtingscoëfficiënt van de normaal gelijk aan  $-\frac{1}{f'(x_0)}$ . Twee rechten zijn immers loodrecht indien hun richtingscoëfficiënten  $m_1$  en  $m_2$  voldoen aan  $m_1 m_2 = -1$ . De normaal wordt bijgevolg gegeven door de vergelijking

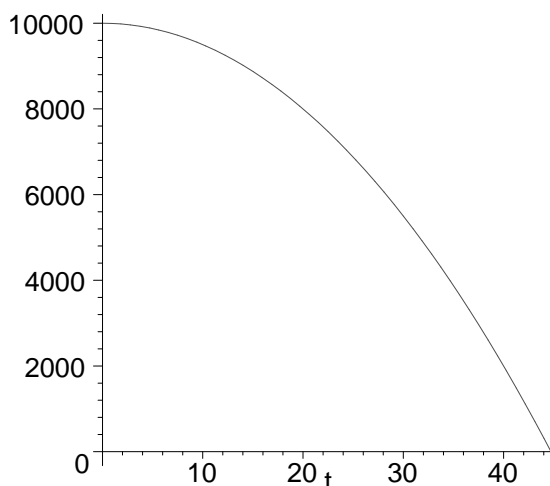
$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

**Voorbeeld 11.** De raaklijn aan de kromme  $y = x^{\frac{1}{3}}$  in het punt  $(1, 1)$  heeft richtingscoëfficiënt  $f'(x_0) = \frac{1}{3}$ . De normaal heeft daarom richtingscoëfficiënt  $-3$  en heeft bijgevolg als vergelijking

$$y - 1 = -3(x - 1).$$

### 3. De afgeleide als snelheid

**Voorbeeld 12.** Stel dat een voorwerp van een bepaalde hoogte (bv. 10000 m) naar beneden valt (onder invloed van de zwaartekracht). De hoogte van dit voorwerp in functie van de tijd wordt dan gegeven door de functie  $h = 10000 - 5t^2$ . Deze reële functie wordt grafisch voorgesteld in Figuur 31.



Figuur 31. Hoogte van een vallend voorwerp als functie van de tijd.

We zien dat het voorwerp steeds sneller naar beneden valt. Om de snelheid van het voorwerp te berekenen op een bepaald tijdstip  $t_0$  (bijvoorbeeld na 15 seconden, d.w.z. voor  $t_0 = 15$ ), kunnen we bepalen welk hoogteverschil het voorwerp overbrugt in een bepaalde tijd  $\Delta$  (bijvoorbeeld 1 seconde), d.w.z., we bepalen het verschil

$$h(t_0 + \Delta) - h(t_0).$$

Het is dan duidelijk dat (de absolute waarde van) het quotiënt

$$\frac{h(t_0 + \Delta) - h(t_0)}{\Delta}$$

de *gemiddelde snelheid* van het voorwerp weergeeft in het tijdsinterval  $[t_0, t_0 + \Delta]$ , d.w.z. de *constante* snelheid die we nodig hebben om in de gegeven tijd  $\Delta$  het gegeven hoogteverschil te overbruggen.

Als we het beschouwde tijdsinterval  $\Delta$  zeer klein laten worden, zullen we een steeds betere benadering vinden voor de snelheid van het voorwerp op het ogenblik  $t_0$ .

Wanneer de functie  $y = f(t)$  de evolutie van een grootte beschrijft in functie van de tijd, kunnen we aan de afgeleide van de functie  $f(t)$  daarom een alternatieve (mechanische) interpretatie geven.

Omdat de waarde van de grootte  $y$  op het ogenblik  $t$  gegeven wordt door  $f(t)$ , zien we dat

$$\frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta}$$

de *gemiddelde snelheid* aangeeft waarmee de grootte  $y$  verandert in het tijdsinterval  $[t, t + \Delta]$ . Wanneer we de lengte van het tijdsinterval  $\Delta$  zeer klein laten worden, vinden we

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta} = f'(t),$$

terwijl de gemiddelde snelheid nadert tot de *ogenblikkelijke snelheid* waarmee  $y$  verandert op het ogenblik  $t$ . We kunnen de afgeleide  $f'(t_0)$  op het ogenblik  $t_0$  daarom interpreteren als de snelheid waarmee de grootte  $y = f(t)$  verandert op dat ogenblik  $t_0$ .

**Voorbeeld 13.** De snelheid van het vallende voorwerp uit het vorige voorbeeld op het tijdstip  $t$  wordt gegeven door

$$h'(t) = -10t.$$

Na 15 seconden is de snelheid van het vallende voorwerp dus gelijk aan  $-150\text{m/s}$ . Omdat deze waarde negatief is, is de hoogte  $h$  op dat moment dalend.

**Voorbeeld 14.** Beschouwen we de *rechtlijnige beweging*, dit wil zeggen de beschrijving van de beweging van een deeltje langs een rechte lijn. Door op de rechte een referentiepunt (oorsprong) en een eenheid te kiezen, kunnen we elk punt van de rechte laten overeenkomen met een reëel getal  $s$ . De beweging van het deeltje wordt dan volledig beschreven door de functie

$$s(t),$$

die de positie van het punt op het ogenblik  $t$  weergeeft.

De *ogenblikkelijke snelheid* van het deeltje op het tijdstip  $t$  wordt gegeven door de eerste afgeleide van de functie  $s$ ,

$$v = s'(t).$$

Het is duidelijk dat, wanneer  $v > 0$ , het punt zich verplaatst in de richting van grotere  $s$ -waarden, terwijl  $v < 0$  betekent dat de het punt zich verplaatst in dalende  $s$ -richting. Wanneer  $v = 0$  zegt men dat het deeltje op dat tijdstip *in rust* is.

Op dezelfde wijze bepaalt de tweede afgeleide functie

$$a = v'(t) = s''(t)$$

de snelheid waarmee de snelheid  $v$  verandert, dus de *ogenblikkelijke versnelling* van het deeltje op tijdstip  $t$ .

Als  $a > 0$ , dan is  $v$  stijgend, terwijl  $a < 0$  betekent dat  $v$  dalend is. Als  $a$  en  $v$  hetzelfde teken hebben, dan neemt de snelheid van het deeltje toe in absolute waarde, terwijl deze absolute waarde afneemt wanneer  $a$  en  $v$  tegengesteld teken hebben.

**Voorbeeld 15.** Beschouwen we een deeltje dat beweegt op een verticale rechte onder invloed van de zwaartekracht. De beweging van dit deeltje wordt gegeven door de functie

$$h = -g\frac{t^2}{2} + v_0t + h_0,$$

die de hoogte van het voorwerp beschrijft in functie van de tijd. Hierbij is  $g$  de zwaartekrachtconstante,  $h_0$  en  $v_0$  de hoogte en snelheid van het deeltje op het tijdstip  $t = 0$ .

De (ogenblikkelijke) snelheid van dit deeltje wordt gegeven door  $v = -gt + v_0$ , de ogenblikkelijke versnelling door  $a = -g$ .

**Voorbeeld 16.** (Cirkelvormige beweging) Beschouwen we vervolgens de beweging van een deeltje langs een cirkel. Elk punt  $P$  van de cirkel kan voorgesteld worden door de middelpuntshoek  $\theta$  bepaald door dat punt  $P$  en een gekozen referentiepunt (oorsprong)  $O$ . De beweging van het deeltje wordt bijgevolg beschreven door een functie

$$\theta(t),$$

die de positie van het deeltje in functie van de tijd weergeeft. De afgeleide van deze functie  $\theta(t)$ ,

$$\omega = \theta'(t),$$

geeft de snelheid waarmee de hoek  $\theta$  verandert, en we noemen  $\omega$  de *ogenblikkelijke hoeksnelheid*.

De tweede afgeleide van de functie,

$$\alpha = \omega'(t) = \theta''(t),$$

wordt de *ogenblikkelijke hoekversnelling* genoemd.

Wanneer  $\alpha = 0$  voor elke waarde van  $t$ , dan is  $\omega$  constant, en we zeggen dat het deeltje met een *constante hoeksnelheid* beweegt. Wanneer  $\alpha$  constant is, spreken we over een *constante hoekversnelling*.

## 4. Gekoppelde snelheden

Beschouwen we nu meerdere grootheden, die allen veranderen in functie van de tijd, en die verbonden zijn door een vergelijking. Door deze vergelijking af te leiden naar de tijd, kunnen we nagaan wat de relatie is tussen de snelheden waarmee deze grootheden veranderen.

**Voorbeeld 17.** Beschouwen we een bolvormige ballon, waaruit gas ontsnapt met een snelheid van  $900\text{cm}^3/\text{s}$ , dit wil zeggen dat  $V' = -900$ . Omdat het volume en de oppervlakte van een bol met straal  $r$  gegeven worden door

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2,$$

zien we dat

$$V' = 4\pi r^2 r', \quad S' = 8\pi r r'.$$

Op het ogenblik dat de straal van de bol gelijk is aan  $r = 360\text{cm}$ , is bijgevolg

$$r' = \frac{-900}{4\pi 360^2},$$

en dus is

$$S' = 8\pi 360 \cdot \frac{-900}{4\pi 360^2} = -5\text{cm}^2/\text{s}.$$

De oppervlakte neemt bijgevolg af met  $5\text{cm}^2$  per seconde.



# HOOFDSTUK 6

## PARTIËLE AFGELEIDEN

### 1. Inleiding

Een (reële) functie van  $n$  veranderlijken is een voorschrift

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dat aan een stel van  $n$  reële getallen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  een reëel getal  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  associeert.

**Voorbeeld 1.** De functie

$$f(x, y) = \sin(x + y),$$

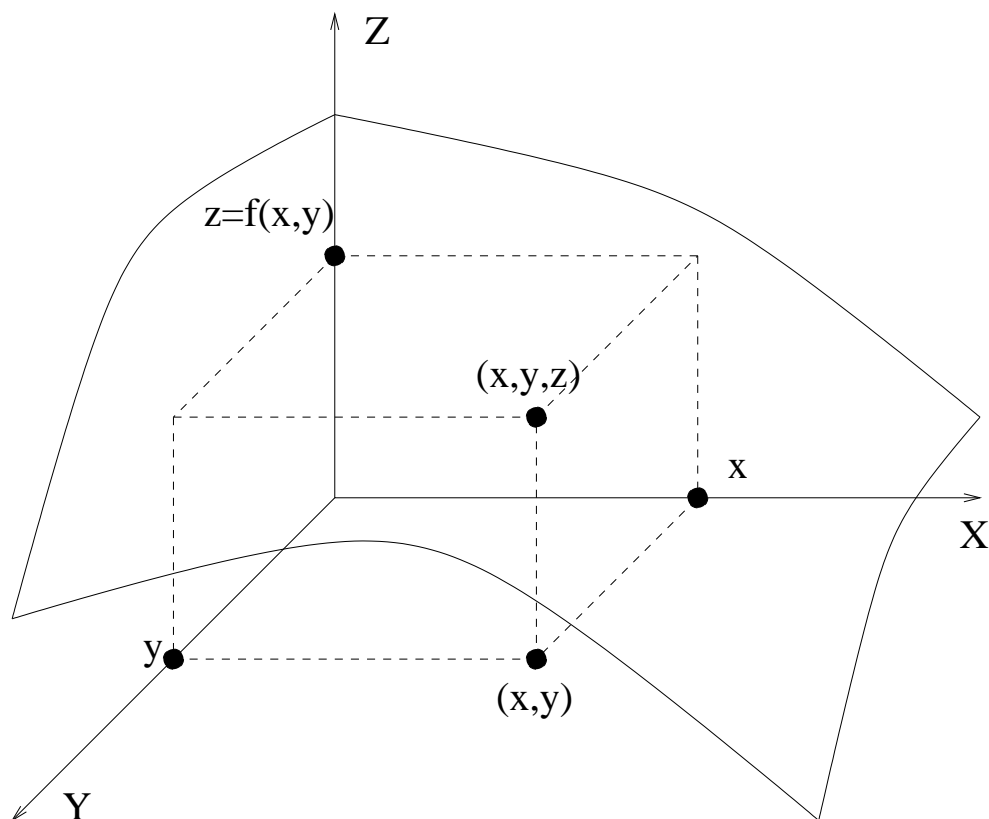
is een functie van twee veranderlijken. Ze associeert aan de getallen  $x = 1$  en  $y = 1$  het getal  $\sin(1 + 1) = \sin(2)$ , en aan de waarden  $x = 0$  en  $y = \pi$  het getal  $\sin(0 + \pi) = 0$ . De functie

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

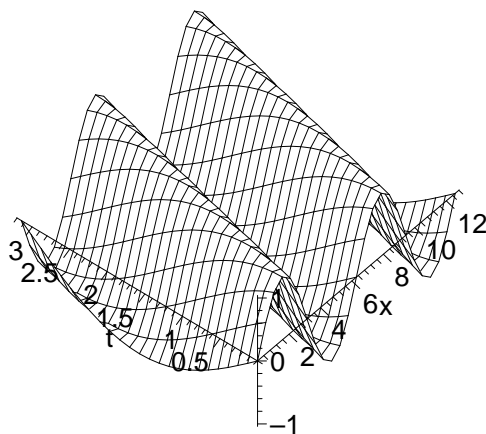
is een functie van drie veranderlijken.

In dit hoofdstuk behandelen we in het kort enkele aspecten van functies van meerdere veranderlijken. We zullen ons hierbij voornamelijk richten op functies van twee veranderlijken. De meeste definities kunnen echter onmiddellijk veralgemeend worden tot functies van drie of meer veranderlijken.

Een functie van twee veranderlijken  $z = f(x, y)$  kan meetkundig voorgesteld worden als een oppervlak in de driedimensionale ruimte. Met elk punt  $(x, y)$  in het  $XY$ -vlak laten we hiertoe het punt  $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$  in de driedimensionale ruimte overeenkomen.



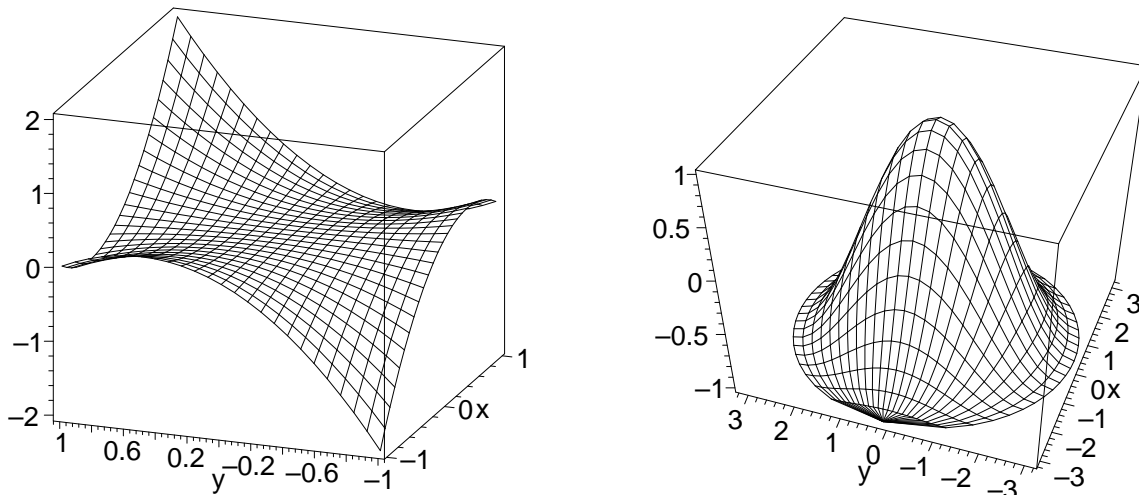
Figuur 31. Meetkundige voorstelling van een functie van twee veranderlijken.



Figuur 32. Meetkundige voorstelling van de functie  $f(x, t) = \sin(x - t)$ .

## 2. Partiële afgeleiden

De afgeleide van een functie  $y = f(x)$  van één veranderlijke  $x$  geeft aan hoe de waarde van  $f(x)$  verandert als we de waarde van  $x$  laten veranderen. Voor een functie  $z = f(x, y)$  van twee (of meer) veranderlijken kunnen we op een analoge manier nagaan hoe de functiewaarde  $f(x, y)$  verandert indien we slechts één van de veranderlijken laten variëren (en de andere veranderlijke constant houden).



Figuur 33. Meetkundige voorstelling van  $f(x, y) = x^2y + xy^2$  en  $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ .

Stel dus dat  $z = f(x, y)$  een functie is van twee veranderlijken. Indien we de waarde van  $y$  constant houden, kunnen we deze functie beschouwen als een functie van één veranderlijke  $x$ . De afgeleide van deze functie wordt gegeven door

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Deze afgeleide wordt de *partiële afgeleide van  $f$  ten opzichte van  $x$*  genoemd. Op dezelfde manier kunnen we de waarde van  $x$  constant houden en de veranderlijke  $y$  laten variëren. De functie  $f(x, y)$  is dan een functie van één veranderlijke  $y$ . De afgeleide van deze functie wordt gegeven door

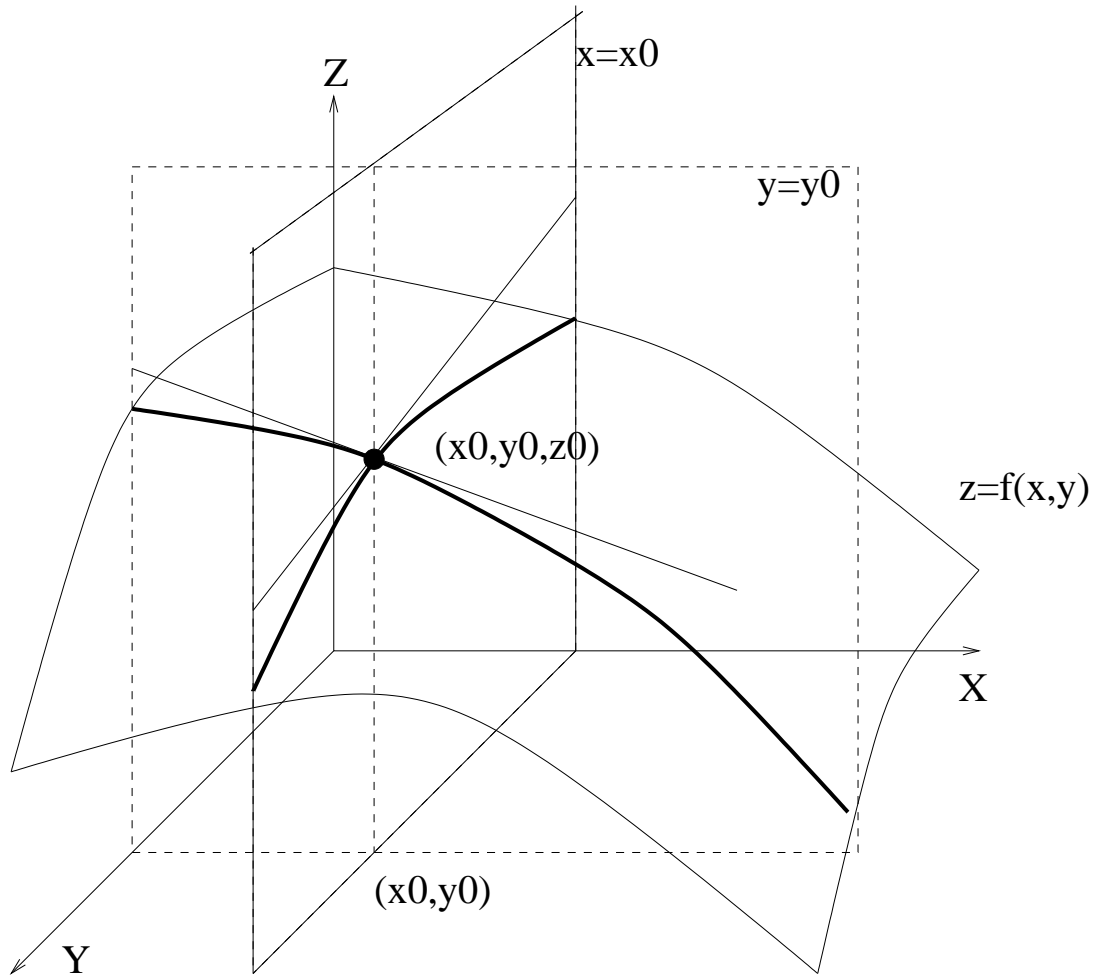
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h},$$

en wordt de *partiële afgeleide van  $f$  ten opzichte van  $y$*  genoemd.

**Voorbeeld 2.** Beschouwen we de functie  $f(x, t) = \sin(x - 2t)$ . De partiële afgeleiden van deze functie ten opzichte van de veranderlijken  $x$  en  $t$  worden dan gegeven door

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x - 2t), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -2 \cos(x - 2t).$$

De partiële afgeleide ten opzichte van  $x$  van een functie van twee veranderlijken in een punt  $(x_0, y_0)$  heeft de volgende meetkundige betekenis. De functie  $z = f(x, y)$  kan voorgesteld worden als een oppervlak in de driedimensionale ruimte. Als we  $x$  laten variëren en  $y$  gelijk aan  $y_0$  houden, snijden we dit oppervlak met het vertikaal vlak  $y = y_0$  (evenwijdig met het  $XZ$ -vlak en door het beschouwde punt  $(x_0, y_0)$ ). De snijlijn is dan een vlakke kromme (die beschouwd wordt als een functie van één veranderlijke  $x$ ). De partiële afgeleide  $\frac{\partial f}{\partial x}$  geeft dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze snijlijn in het punt  $(x_0, y_0, z_0)$ . Op dezelfde manier geeft de partiële afgeleide ten opzichte van  $y$  de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de snijlijn van het oppervlak  $z = f(x, y)$  met het verticale vlak  $x = x_0$ .



Figuur 34. Meetkundige interpretatie van de partiële afgeleide.

**Oefening 1.** Bereken alle partiële afgeleiden van volgende functies.

1.  $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$
2.  $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$
3.  $z = \sin(2x + 3y)$
4.  $z = e^{x^2+3xy}$
5.  $z = \arctg \frac{y}{x}$
6.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7.  $z = 2x^2 - 5xy + y^2$
8.  $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$
9.  $z = \sin 3x \cos 4y$
10.  $z = \sin(x - vt)$
11.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
12.  $f(x, y, z) = xyz$

### 3. Partiële afgeleiden van hogere orde

Stel dat  $z = f(x, y)$  een functie is van twee veranderlijken. De partiële afgeleiden  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $\frac{\partial f}{\partial y}$  zijn dan opnieuw functies van twee veranderlijken, en we kunnen bijgevolg ook van deze twee functies de partiële afgeleiden berekenen. Deze functies worden de *partiële afgeleiden van tweede orde* genoemd, en ze worden als volgt genoteerd:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

**Voorbeeld 3.** De partiële afgeleiden van tweede orde van de functie

$$f(x, t) = \sin(x - 2t)$$

worden gegeven door

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x - 2t)) = -\sin(x - 2t), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} (\cos(x - 2t)) = 2 \sin(x - 2t), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} (-2 \cos(x - 2t)) = 2 \sin(x - 2t), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (-2 \cos(x - 2t)) = -4 \sin(x - 2t).\end{aligned}$$

Door deze partiële afgeleiden van tweede orde nogmaals partieel af te leiden bekommen we vervolgens de partiële afgeleiden van derde orde.

We merken op dat, indien de functie  $z = f(x, y)$  en de partiële afgeleiden continue functies zijn, de volgorde waarin we de (gemengde) partiële afgeleiden berekenen onbelangrijk is, dit wil zeggen dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

**Oefening 2.** Bereken alle partiële afgeleiden van tweede orde van de functies uit de vorige oefening.

## 4. Partiële en totale differentiaal

In een vorig hoofdstuk hebben we de differentiaal van een functie  $y = f(x)$  van één veranderlijke gedefinieerd als

$$df(x) = f'(x)dx.$$

We hebben ook getoond dat, indien we  $x$  laten aangroeien met  $dx$ ,  $df$  de aangroei in de  $y$ -richting aangeeft als we de raaklijn volgen in plaats van de functie zelf. Indien de toename  $dx$  voldoende klein is, geeft  $df(x)$  een vrij nauwkeurige benadering van de toename van de functiewaarde  $f(x)$ .

De *partiële differentiaal* ten opzichte van  $x$  van een functie van twee veranderlijken  $z = f(x, y)$  wordt gedefinieerd als

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

terwijl de *partiële differentiaal* ten opzichte van  $y$  gedefinieerd wordt als

$$d_y f = \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

De *totale differentiaal* van de functie is de som van alle partiële differentialen, dus

$$df = d_x f + d_y f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

**Voorbeeld 4.** De partiële differentialen van de functie  $f(x, t) = \sin(x - 2t)$  worden gegeven door

$$d_x f = \cos(x - 2t)dx, \quad d_t f = -2 \cos(x - 2t)dt,$$

en de totale differentiaal is bijgevolg

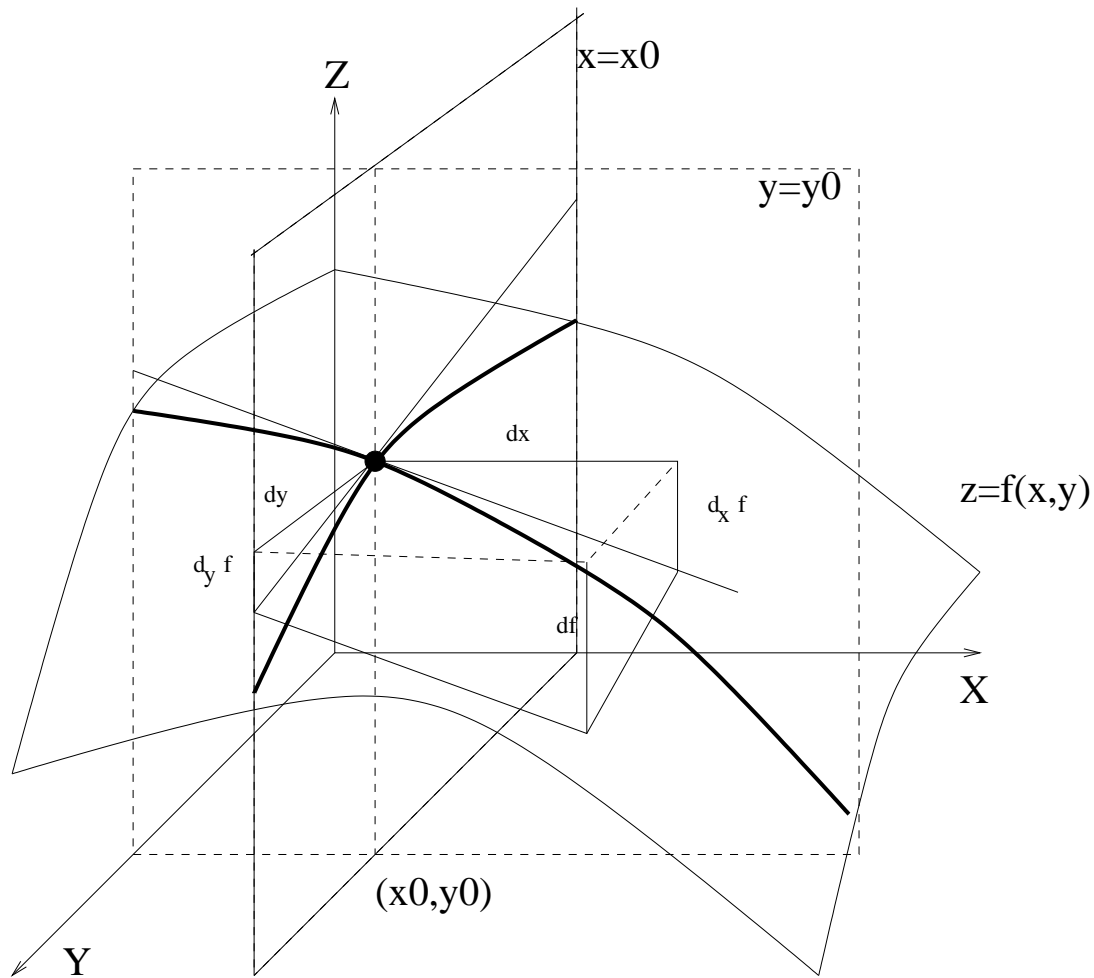
$$df = \cos(x - 2t)dx - 2 \cos(x - 2t)dt.$$

Voor functies van  $n$  veranderlijken  $x_1, x_2, \dots, x_n$  definieert men de totale differentiaal op dezelfde manier, dus

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

**Oefening 3.** Zoek de totale differentialen van de functies uit de vorige oefening.

De meetkundige betekenis van deze begrippen kan als volgt worden uitgelegd. Als we  $x$  veranderen en  $y$  constant houden, beschouwen we de snijlijn van het oppervlak  $z = f(x, y)$  met een verticaal vlak  $y = y_0$ . Als we nu  $x$  met  $dx$  laten toenemen, geeft de partiële differentiaal  $d_x f$  de aangroei in de  $z$ -richting aan als we in de plaats van het oppervlak de raaklijn aan deze snijlijn volgen. Op dezelfde manier kunnen we  $d_y f$  beschouwen als de toename in de  $z$ -richting indien we de raaklijn aan de snijlijn met het verticale vlak  $x = x_0$  volgen en een toename  $dy$  nemen voor de veranderlijke  $y$ . Als we  $x$  laten toenemen met  $dx$  en  $y$  laten toenemen met  $dy$  geeft de totale differentiaal  $df$  de toename in de  $z$ -richting aan indien we, in de plaats van het oppervlak  $z = f(x, y)$ , het raakvlak aan dit oppervlak volgen (dit is het vlak dat de twee hierboven beschreven raaklijnen bevat).



Figuur 35. Meetkundige betekenis van partiële en totale differentiaal.

Het is ook duidelijk dat, voor voldoende kleine toenames  $dx$  en  $dy$ , de totale differentiaal een vrij goede benadering geeft van de verandering van de functiewaarden.

## 5. De kettingregel

Stel dat  $z = f(x, y)$  een functie van twee veranderlijken is, en  $x = g(t)$  en  $y = h(t)$  twee functies van één veranderlijke. We kunnen dan een nieuwe functie van één veranderlijke construeren die een getal  $t$  afbeeldt op het getal  $z = f(g(t), h(t))$ . De afgeleide van deze functie naar de veranderlijke  $t$  wordt de *totale afgeleide* van de functie genoemd. Deze totale afgeleide wordt gegeven door

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Voor functies van  $n$  veranderlijken kunnen we schrijven dat

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

**Voorbeeld 5.** De afstand (tot de oorsprong  $(0, 0)$ ) van een punt  $(x, y)$  in het vlak wordt gegeven door de functie van twee veranderlijken

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De beweging van een punt wordt beschreven door de coördinaten van dit punt als functies van de tijd te beschouwen, bijvoorbeeld

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t.$$

De verandering van de afstand van het bewegende punt tot de oorsprong in functie van de tijd wordt dan gemeten door de totale afgeleide van de afstandsfunctie,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos t + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} 2 \cos(2t) = \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + \sin^2 2t}} + \frac{2 \sin 2t \cos 2t}{\sqrt{\sin^2 t + \sin^2 2t}}.$$

Stel vervolgens dat  $z = f(x, y)$  een functie van twee veranderlijken is, en dat  $x = g(s, t)$  en  $y = h(s, t)$  opnieuw functies van twee veranderlijken zijn. We kunnen dan een nieuwe functie van twee veranderlijken construeren die twee getallen  $s$  en  $t$  afbeeldt op het getal

$$z = f(g(s, t), h(s, t)).$$

De partiële afgeleiden van deze functie ten opzichte van de veranderlijken  $s$  en  $t$  worden gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Indien de functie  $f$  afhangt van  $n$  veranderlijken  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , en elk van deze veranderlijken geschreven wordt als een functie van  $m$  veranderlijken  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , kunnen we stellen dat, voor alle waarden van  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}.$$

**Voorbeeld 6.** De afstand tot de oorsprong van een punt in het vlak wordt beschreven door de functie van twee veranderlijken

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Als we met poolcoördinaten  $(\rho, \theta)$  willen werken gebruiken we de coördinatentransformatie

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

We zien dan dat

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \theta + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \theta = \frac{\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta}{\rho} = 1.$$

Anderzijds is

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rho \sin \theta + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rho \cos \theta = 0.$$



**Oefening 4.** Bereken de totale afgeleide van de functie  $z$  naar de veranderlijke  $t$ , als

$$z = x^2 + 3xy + 5y^2, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

**Oefening 5.** Zelfde vraag voor

$$z = \ln(x^2 + y^2), \quad x = e^{-t}, \quad y = e^t.$$

**Oefening 6.** Bereken de totale afgeleide van  $z$  naar  $x$  als

$$z = x^2 + 2xy + y^2, \quad y = e^x.$$

**Oefening 7.** Beschouw de functies

$$z = x^2 + xy + y^2, \quad x = 2r + s, \quad y = r - 2s.$$

Bereken de partiële afgeleiden van  $z$  ten opzichte van de veranderlijken  $r$  en  $s$ .

**Oefening 8.** Zelfde vraag voor de functies

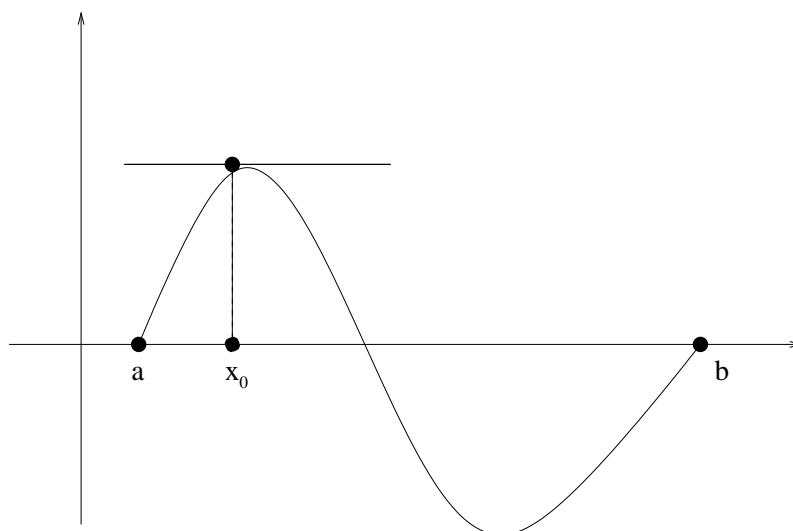
$$u = x^2 + y^2, \quad x = r \cos s, \quad y = r \sin s.$$



# HOOFDSTUK 7

## BELANGRIJKE STELLINGEN

**Stelling 1. (Stelling van Rolle)** *Stel dat een reële functie  $y = f(x)$  continu is op het interval  $[a, b]$  en afleidbaar in elk punt van het interval  $]a, b[$ , en dat bovendien  $f(a) = f(b) = 0$ . Dan bestaat er minstens één punt  $x_0 \in ]a, b[$  waarin de raaklijn evenwijdig loopt met de  $x$ -as, dit wil zeggen dat  $f'(x_0) = 0$ .*



Figuur 36. *De stelling van Rolle.*

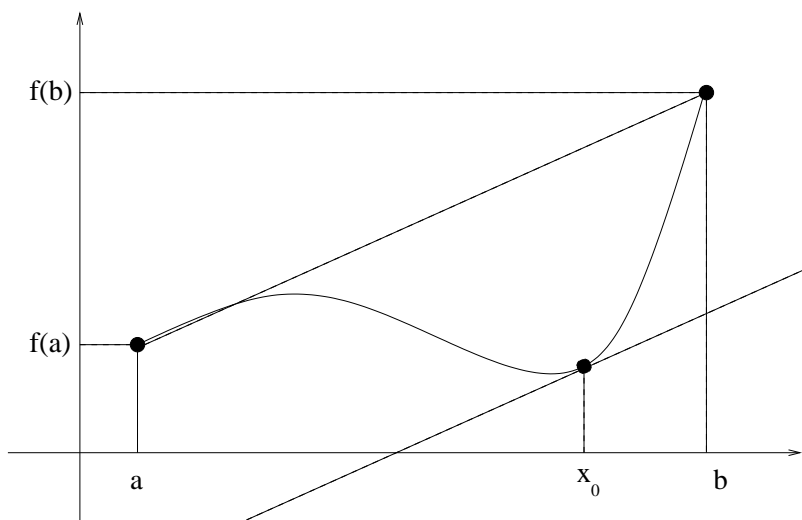
**Bewijs.** Als de functie  $f$  constant is, dan is  $f'(x) = 0$  voor elk punt  $x \in ]a, b[$ . We kunnen het punt  $x_0$  dan willekeurig kiezen in het interval  $]a, b[$ .

Stel dus dat de functie  $f$  niet constant is. Omdat  $f$  continu is op het interval  $[a, b]$  weten we dat de functie in het interval  $[a, b]$  een minimum en een maximum bereikt. Omdat de functie  $f$  niet constant is zijn dit minimum en maximum verschillend. Omdat  $f(a) = f(b)$  moet bovendien minstens één van beide extreme waarden bereikt worden in een punt  $x_0 \in ]a, b[$  dat geen randpunt is van het interval. Omdat de functie  $f$  een minimum of een maximum heeft in  $x_0$  weten we dan dat  $f'(x_0) = 0$ .

■

**Stelling 2. (Stelling van Lagrange)** *Stel dat de reële functie  $y = f(x)$  continu is op het interval  $[a, b]$  en afleidbaar in elk punt van het open interval  $]a, b[$ . Dan bestaat er minstens één punt  $x_0 \in ]a, b[$  waarin de raaklijn evenwijdig loopt met de rechte door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$ , dit wil zeggen dat*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Figuur 37. De stelling van Lagrange.

**Bewijs.** Voor een willekeurig punt  $x \in [a, b]$  is het verschil tussen de rechte door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$  en de grafiek van de functie  $y = f(x)$  gegeven door

$$F(x) = f(x) - \left( f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Het is duidelijk dat

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0.$$

Verder is de reële functie  $y = F(x)$  ook afleidbaar in elk punt van het interval  $]a, b[$  en continu in  $[a, b]$ . Uit de Stelling van Rolle vinden we dan dat er een getal  $x_0 \in ]a, b[$  bestaat waarvoor  $F'(x_0) = 0$ . Omdat

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

volgt hier onmiddellijk uit dat

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

**Stelling 3. (Stelling van Cauchy)** *Stel dat  $f$  en  $g$  twee reële functies zijn die continu zijn in het interval  $[a, b]$  en afleidbaar in elk punt van het open interval  $]a, b[$ . Stel bovendien dat  $g'(x) \neq 0$  voor elk punt  $x \in ]a, b[$ . Dan bestaat er minstens één punt  $x_0 \in ]a, b[$  waarvoor geldt dat*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Bewijs.** Beschouw de functie  $y = F(x)$ , waarbij

$$F(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Het is duidelijk dat deze functie aan alle voorwaarden van de Stelling van Rolle voldoet, en dat er bijgevolg een getal  $x_0 \in ]a, b[$  bestaat waarvoor geldt dat  $F'(x_0) = 0$ .

Omdat  $F'(x) = f'(x) - g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$  volgt het resultaat onmiddellijk.

■

**Stelling 4. (Regel van de l'Hopital)** *Stel dat  $f$  en  $g$  twee functies zijn die voldoen aan de voorwaarden uit de Stelling van Cauchy op een interval  $[A, B]$  dat het getal  $a \in \mathbb{R}$  bevat. Veronderstel bovendien dat  $f(a) = g(a) = 0$ . Als  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  bestaat dan geldt dat*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Bewijs.** Kies een willekeurig punt  $x \in ]A, B[$ . Het is dan duidelijk dat de functies  $f$  en  $g$  op het interval  $[a, x]$  voldoen aan de voorwaarden uit de Stelling van Cauchy, en dat er bijgevolg een getal  $x_0 \in ]a, x[$  bestaat waarvoor geldt dat

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Om de limiet van het quotiënt  $\frac{f(x)}{g(x)}$  voor  $x$  naderend tot  $a$  uit te rekenen moeten we de limiet bepalen van de beelden  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$  van een willekeurige getallenrij  $x_n$  die nadert tot  $a$ . Veronderstel dat  $x_n$  een dergelijke getallenrij is die nadert naar  $a$ . Uit het voorgaande weten we dan dat er voor elk element  $x_n$  uit de getallenrij een getal  $x_{0n} \in ]a, x_n[$  bestaat waarvoor geldt dat

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(x_{0n})}{g'(x_{0n})}.$$

Omdat  $x_{0n}$  ligt tussen  $a$  en  $x_n$  is het duidelijk dat de getallenrij  $x_{0n}$  nadert tot  $a$ . De beeldrij  $\frac{f'(x_{0n})}{g'(x_{0n})}$  zal bijgevolg naderen naar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , en we besluiten hieruit dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

De regel van de l'Hopital laat ons toe, onder bepaalde voorwaarden, onbepaaldheden van het type  $\frac{0}{0}$  op te lossen.

**Voorbeeld 1.** Het is duidelijk dat de functies  $y = \sin x$  en  $y = x$  beide nul worden in  $x = 0$ . Omdat deze functies voldoen aan de voorwaarden uit de stelling kunnen we berekenen dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

We kunnen de regel van de l'Hopital op verschillende manieren uitbreiden:

1. We kunnen de regel van de l'Hopital ook gebruiken om limieten te berekenen voor  $x$  naderend tot oneindig.
2. We kunnen op dezelfde manier onbepaaldheden van het type  $\frac{\infty}{\infty}$  oplossen.

**Voorbeeld 2.** De functies  $y = 2x + 3$  en  $y = 3x - 1$  naderen beide tot oneindig wanneer  $x$  nadert tot oneindig. Toepassing van de regel van de l'Hopital geeft dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Indien de limiet van het quotiënt  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  opnieuw een onbepaaldheid van type  $\frac{0}{0}$  of  $\frac{\infty}{\infty}$  oplevert kunnen we de regel van de l'Hopital herhaalde malen gebruiken om tot het resultaat te komen.

**Voorbeeld 3.** Tweemaal toepassen van de regel van de l'Hopital levert ons dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \frac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

4. We kunnen de regel van de l'Hopital ook gebruiken om andere types van onbepaaldheden op te lossen.

Om onbepaaldheden van type  $0 \cdot \infty$  op te lossen schrijven we

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Deze laatste limiet kan dan met behulp van de regel van de l'Hopital worden berekend.

**Voorbeeld 4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

Op dezelfde manier lost men onbepaaldheden van het type  $0^0$ ,  $\infty^0$  en  $1^\infty$  op door te stellen dat

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln(f(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))}.$$

De limiet in de exponent van deze laatste uitdrukking kan vervolgens worden berekend met behulp van de regel van de l'Hopital.

**Voorbeeld 5.** Gebruik makend van het vorige voorbeeld en de regel van de l'Hopital vinden we dat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Om onbepaaldheden van type  $\infty - \infty$  op te lossen schrijft men tenslotte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

waarna men de regel van de l'Hopital toepast.

**Voorbeeld 6.** Tweemaal toepassen van de regel van de l'Hopital geeft dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Oefening 1.** Bereken de volgende limieten.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$         | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$                | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$                      |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-x^2}$                     | 10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$                                |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x}$                     |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$                 | 12. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 3x)^{\frac{1}{x}}$                  |
| 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$                | 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x)$                          |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$                                | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x)^{\frac{1}{x}}$            |



# HOOFDSTUK 8

## DE FORMULE VAN TAYLOR-MACLAURIN

### 1. Inleiding

Stel dat  $y = f(x)$  een reële functie is, die  $n$  keer afleidbaar is in een punt  $a \in \text{dom}(f)$ . Dan kunnen we een veeltermfunctie van graad  $n$  construeren,

$$y = P_n(x), \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n,$$

zodanig dat  $f$  en de eerste  $n$  afgeleiden in het punt  $a$  samenvallen met  $P_n$  en zijn eerste  $n$  afgeleiden.

**Definitie 1.** De faculteit van een strikt positief natuurlijk getal  $n \in \mathbb{N}_0$  wordt gedefinieerd als

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

We zeggen verder dat

$$0! = 1.$$

Het is duidelijk uit de definitie dat voor strikt positieve natuurlijke getallen geldt dat

$$n! = n \cdot (n - 1)!.$$

**Voorbeeld 1.**

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, \quad 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720.$$

Om de veelterm  $P_n$  te bepalen merken we op dat

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n \\ P'_n(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} \\ P''_n(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &\vdots \\ P_n^{(i)}(x) &= i!a_i + \dots + n(n-1)\dots(n-i+1)a_n x^{n-i} \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x) &= n!a_n, \end{aligned}$$

De coëfficiënten  $a_0, \dots, a_n$  van de veelterm  $P_n$  moeten bijgevolg gekozen worden zodanig dat

$$\begin{aligned} f(a) &= P_n(a) = 0!a_0, \\ f'(a) &= P'_n(a) = 1!a_1, \\ f''(a) &= P''_n(a) = 2!a_2, \\ &\vdots \\ f^{(i)}(a) &= P_n^{(i)}(a) = i!a_i, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= P_n^{(n)}(a) = n!a_n. \end{aligned}$$

We vinden dus

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

en bijgevolg wordt de veelterm  $P_n$  gegeven door

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

**Voorbeeld 2.** Stel  $f(x) = \sin(x)$  en  $a = 0$ . Dan is

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos(x), & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin(x), & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos(x), & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x), & f^{(4)}(0) &= 0, \\ f^{(5)}(x) &= \cos(x), & f^{(5)}(0) &= 1, \\ f^{(6)}(x) &= -\sin(x), & f^{(6)}(0) &= 0, \end{aligned}$$

en de veelterm  $P_6(x)$  wordt dus gegeven door

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

**Oefening 1.** Bereken  $P_6(x)$  voor de functies  $f(x) = \cos(x)$  en  $f(x) = e^x$ . Stel hierbij  $a = 0$ .

**Oefening 2.** Bereken de veeltermen  $P_6(x)$  voor  $f(x) = \sin(x)$  en  $f(x) = \cos(x)$  wanneer je  $a = \frac{\pi}{3}$  stelt.

## 2. De formule van Taylor-MacLaurin

In de vorige paragraaf zagen we hoe we met een natuurlijk getal  $n$  en een functie  $y = f(x)$  een veelterm kunnen associëren. Het is duidelijk dat de veeltermfunctie  $P_n$  en de functie  $f$  dezelfde functiewaarde geven voor het punt  $a$ . Verder valt ook de raaklijn aan beide grafieken samen in dat punt. We kunnen ons nu afvragen of  $y = P_n(x)$  een goede benadering is voor de functie  $y = f(x)$  in punten  $x$  die dicht bij  $a$  gelegen zijn. Hiervoor moeten we het verschil

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

berekenen tussen de functiewaarde  $f(x)$  en de “benaderde” functiewaarde  $P_n(x)$ . Dit verschil wordt gegeven in de volgende

**Stelling 1. (De formule van Taylor)** *Stel dat de functie  $y = f(x)$   $n + 1$  keer afleidbaar is in de buurt van het punt  $a \in \text{dom}(f)$  en dat  $P_n(x)$  de veeltermfunctie van graad  $n$  is die hierboven werd geconstrueerd. Dan bestaat er een getal  $x_0 \in ]a, x[$  waarvoor geldt dat*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0).$$

**Bewijs.** Met de notaties van hierboven weten we dat

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Omdat  $f(a) = P_n(a)$  geldt ook dat  $R_n(a) = 0$  en we kunnen bijgevolg stellen dat

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} Q(x).$$

We kiezen nu een vaste waarde van  $x$  en definiëren een functie  $F$  gegeven door

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x - t}{1!} f'(t) - \frac{(x - t)^2}{2!} f''(t) - \dots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} Q(x).$$

De functie  $F$  is duidelijk continu in het interval  $[a, x]$  en afleidbaar in het interval  $]a, x[$ . Verder is ook

$$\begin{aligned} F(a) &= f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!}f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x) \\ &= f(x) - R_n(x) - P_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Anderzijds is ook duidelijk dat  $F(x) = 0$ . Bijgevolg voldoet de functie  $F$  aan de voorwaarden van de Stelling van Rolle en kunnen we dus besluiten dat er een getal  $x_0 \in ]a, x[$  bestaat waarvoor geldt dat  $F'(x_0) = 0$ .

Afleiden van de functie  $F$  naar de veranderlijke  $t$  levert ons dat

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q(x).$$

Als we  $t = x_0$  stellen in deze formule en gebruiken dat  $F'(x_0) = 0$  vinden we dat

$$Q(x) = f^{(n+1)}(x_0).$$

■

Indien we  $a = 0$  stellen in het vorige resultaat, vinden we dat

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

waar

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0), \\ R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0), \end{aligned}$$

voor een bepaalde waarde  $x_0 \in ]0, x[$ . Deze speciale toepassing van de formule van Taylor wordt de *formule van MacLaurin* genoemd.

**Voorbeeld 3.** Stel  $x = \frac{\pi}{10}$ ,  $n = 6$ ,  $f(x) = \sin(x)$  en  $a = 0$ . Dan vinden we dat

$$P_6\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \sim 0.309017.$$

Verder is volgens de formule van MacLaurin

$$R_6\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7(-\cos(x_0)),$$

voor een bepaalde  $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{10}[$ . Omdat de cosinus altijd tussen -1 en 1 ligt kunnen we afleiden dat

$$|R_6\left(\frac{\pi}{10}\right)| \leq \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7 \sim 0.6 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Als we dus stellen dat  $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = P_6\left(\frac{\pi}{10}\right)$  maken we een fout die kleiner is dan  $10^{-6}$ .

**Oefening 3.** Bereken  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$  met behulp van  $P_4(x)$ . Hoe nauwkeurig is deze berekening?

**Oefening 4.** Bereken  $e$  op vijf decimalen nauwkeurig.

**Oefening 5.** Bereken  $\sqrt{101}$  op drie decimalen nauwkeurig.

### 3. Reeksontwikkelingen van Taylor-MacLaurin

Stel dat de functie  $f$  onbeperkt afleidbaar is in de omgeving van het punt  $a \in \text{dom}(f)$ . Dan kunnen we voor een willekeurige waarde van  $n \in \mathbb{N}$  de veelterm  $P_n(x)$  berekenen zoals hierboven aangegeven. We vinden dan een rij veeltermfuncties

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a), \\ P_2(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a), \\ P_3(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Indien het verschil  $R_n(x)$  tussen  $f(x)$  en de veelterm  $P_n(x)$  naar nul nadert voor  $n$  naderend naar  $+\infty$ , kunnen we stellen dat  $f(x)$  kan geschreven worden als de (oneindige) machtreeks

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

Deze machtreeks wordt de *reeksontwikkeling van Taylor* voor de gegeven functie genoemd. In het speciale geval waarin  $a = 0$  spreken we van de *reeksontwikkeling van MacLaurin*.

**Voorbeeld 4.** Voor  $f(x) = \sin(x)$  zien we dat de reeksontwikkeling van MacLaurin gegeven wordt door

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

**Voorbeeld 5.** Op dezelfde wijze berekenen we dat

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

en dat de exponentiële functie gegeven wordt door de reeksontwikkeling

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

**Oefening 6.** Bereken de reeksontwikkeling van MacLaurin voor de functie  $y = \frac{1}{1-x}$ .

**Oefening 7.** Bereken de reeksontwikkeling van Taylor voor de functie  $y = \ln x$  rond het punt  $a = 1$ .

**Oefening 8.** Bereken de reeksontwikkeling van Taylor voor de functie  $f(x) = \sin(x)$  rond het punt  $a = \frac{\pi}{3}$ . Bereken hiermee de sinus van een hoek van 62 graden.



# HOOFDSTUK 9

## COMPLEXE GETALLEN

### 1. Definitie

We hebben in wat voorafgaat steeds gewerkt met de verzameling van de reële getallen  $\mathbb{R}$ . We hebben gezien dat het kwadraat van een dergelijk reëel getal  $x$  steeds positief is, en dat er bijgevolg geen enkel reëel getal  $x$  bestaat waarvoor

$$x^2 + 1 = 0, \quad \text{of} \quad x^2 = -1.$$

Om een algemene kwadratische vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

op te lossen berekent men eerst de *discriminant* van deze vergelijking. Dit is het reëel getal dat gegeven wordt door

$$D = b^2 - 4ac.$$

Indien deze discriminant  $D$  positief is, kunnen we hieruit de vierkantswortel  $\sqrt{D}$  trekken, en we weten dan dat de oplossingen van de vierkantsvergelijking gegeven worden door de reële getallen

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Indien  $D$  negatief is, kunnen we geen vierkantswortel uit  $D$  trekken (er bestaat dan geen reëel getal  $x$  waarvoor  $x^2 = D$ ) en we vinden in dit geval dan ook geen reële oplossingen van de vierkantsvergelijking.

Om deze problemen op te lossen voeren we in dit hoofdstuk een nieuwe verzameling van getallen in, die we *complexe getallen* zullen noemen. Hiervoor voeren we eerst een nieuw “getal” in, dat we met  $j$  zullen aanduiden en waarvan we eisen dat

$$j^2 = -1.$$

**Definitie 1.** Een *complex getal* is een uitdrukking van de vorm  $a + bj$ , waarbij  $a$  en  $b$  willekeurige reële getallen zijn. Indien  $z = a + bj$  een complex getal is noemen we  $a = \operatorname{Re}(z)$  het reëel deel van  $z$ , en  $bj = \operatorname{Im}(z)$  het imaginair deel van  $z$ . Indien  $b = 0$  is  $z = a$  een reëel getal, indien  $a = 0$  noemen we  $z = bj$  een imaginair getal. De verzameling van alle complexe getallen noteren we met het symbool  $\mathbb{C}$ . Voor elk complex getal  $z = a + bj$  kunnen we tenslotte een complex getal  $\bar{z} = \overline{a + bj} = a - bj$  definiëren, dat we de *complex toegevoegde* van  $z$  noemen.

## 2. Rekenen met complexe getallen

**Definitie 2.** Stel dat  $z_1 = a + bj$  en  $z_2 = c + dj$  twee complexe getallen zijn. Dan is

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)j, \\ z_1 - z_2 &= (a - c) + (b - d)j, \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)j, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j. \end{aligned}$$

Deze definities tonen aan dat we met complexe getallen kunnen rekenen op ongeveer dezelfde wijze als met reële getallen. We beschouwen hierbij het symbool  $j$  als een onbekend getal in de uitdrukkingen, maar vervangen steeds  $j^2$  door  $-1$  waar dit mogelijk is.

**Voorbeeld 1.** Als we deze techniek toepassen zien we dat

$$(a + bj)(c + dj) = ac + bcj + adj + bdj^2 = ac + bcj + adj - bd = (ac - bd) + (ad + bc)j.$$

Op dezelfde wijze vinden we dat

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)j}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j.$$

Met behulp van de complexe getallen kunnen we nu vierkantsvergelijkingen oplossen waarvan de discriminant negatief is. We vinden in dit geval twee complexe oplossingen.



**Voorbeeld 2.** De vergelijking  $x^2 - 10x + 26 = 0$  heeft discriminant

$$D = 10^2 - 4 \cdot 26 = -4 = (\pm 2j)^2.$$

De (complexe) oplossingen van deze vierkantsvergelijking zijn dan gegeven door

$$\frac{10 + 2j}{2} = 5 + j, \quad \frac{10 - 2j}{2} = 5 - j.$$

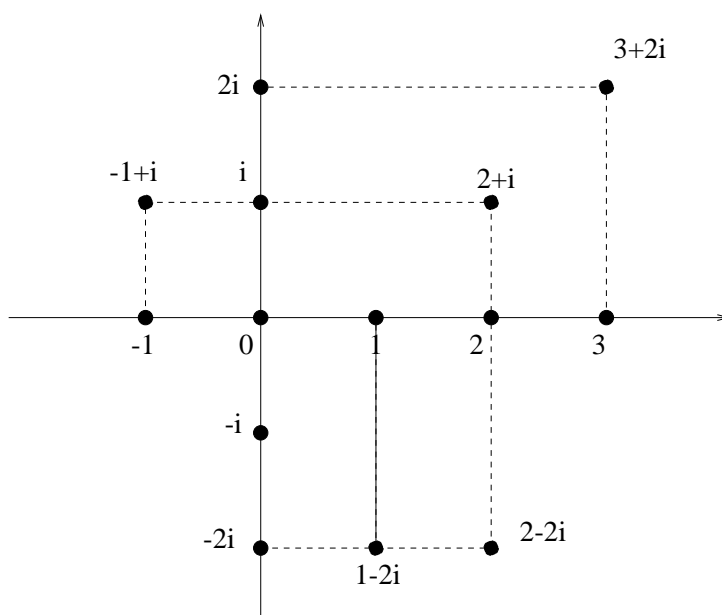
Deze oplossingstechniek voor kwadratische vergelijkingen kadert in een veel breder toepassingsgebied. Een belangrijk resultaat uit de algebra leert ons immers dat *elke* veeltermvergelijking

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

(met  $a_n \neq 0$ ,  $a_n$  complexe getallen) exact  $n$  complexe getallen als oplossingen heeft. Indien alle coëfficiënten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  bovendien reëel zijn, komen deze oplossingen in paren voor: als  $a + bj$  een oplossing is, is ook de complex toegevoegde  $a - bj$  een oplossing.

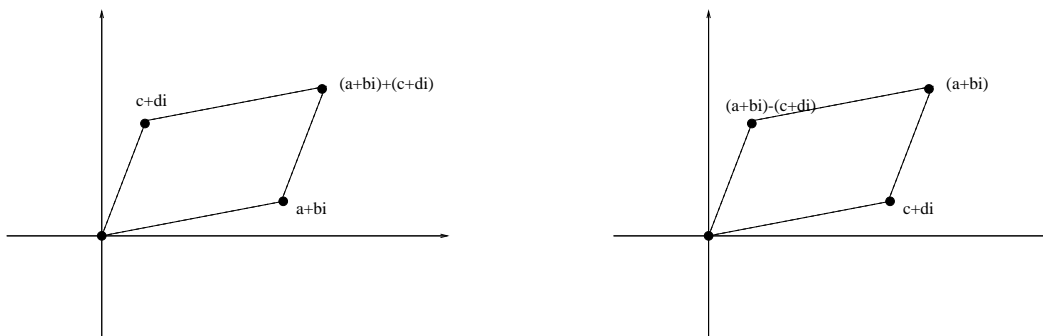
### 3. Grafische voorstelling

Elk complex getal  $z = a + bj$  wordt voorgesteld door een punt in het vlak met coördinaten  $(a, b)$ . Op deze wijze bekomen we het *complexe vlak* of het *diagram van Argand*.



Figuur 38. Enkele complexe getallen en hun grafische voorstelling.

De som en het verschil van complexe getallen kunnen dan grafisch worden voorgesteld als volgt.



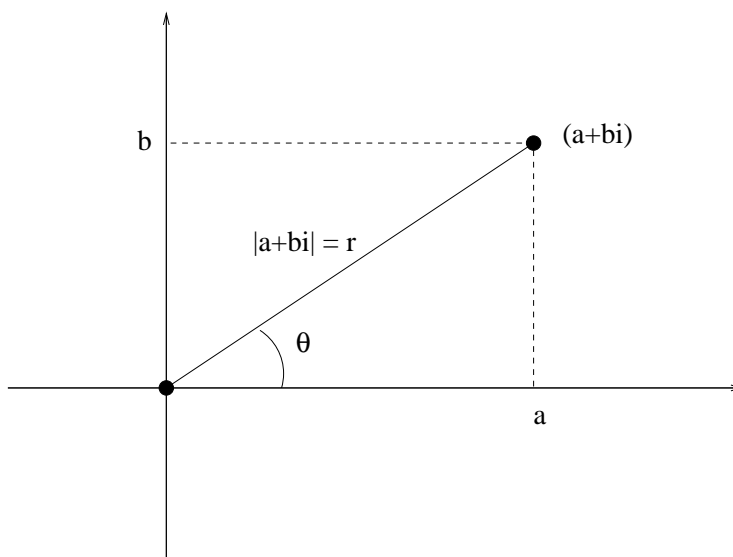
Figuur 39. Som en verschil van complexe getallen.

## 4. Goniometrische voorstelling

**Definitie 3.** De modulus van een complex getal  $z = a + bj$  wordt gegeven door

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Het argument van het complex getal is de hoek  $\theta$  die gevormd wordt door de  $x$ -as en de geöriënteerde rechte door 0 en  $z$ .



Figuur 40. Modulus en argument van een complex getal.

Stel nu dat  $z$  een complex getal is met modulus  $r$  en argument  $\theta$ . Het is dan duidelijk uit de bijgevoegde figuur dat

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta,$$

en het complex getal  $z$  kan bijgevolg geschreven worden als

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta).$$

Deze schrijfwijze noemen we de *goniometrische voorstelling* van een complex getal.

Om de goniometrische voorstelling van een complex getal  $z = a + bj$  te berekenen merken we op dat

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}.$$

Het argument  $\theta$  is door deze formule echter niet eenduidig bepaald, omdat

$$\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \operatorname{tg} \theta.$$

Als we echter rekening houden met het kwadrant waarin het punt  $a + bj$  zich bevindt, kunnen we  $\theta$  wel volledig bepalen.

**Voorbeeld 3.** Om de goniometrische vorm te bepalen van het complex getal  $z = 1 - j$  merken we op dat

$$|z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \theta = -1.$$

Bijgevolg is  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  of  $\theta = \frac{7\pi}{4}$ . Omdat het getal  $1 - j$  echter in het vierde kwadrant ligt, weten we dat

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi,$$

en bijgevolg is  $\theta = \frac{7\pi}{4}$ . De goniometrische vorm van  $z = 1 - j$  wordt dan gegeven door

$$\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right).$$

Het nut van de goniometrische voorstelling van complexe getallen blijkt uit de volgende stelling.

**Stelling 1.** *Stel dat  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$  en  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$  twee complexe getallen zijn. Dan is*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

*Bijgevolg geldt voor elk natuurlijk getal  $n$  dat*

$$z^n = r^n (\cos \theta + j \sin \theta)^n = r^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)).$$

*Deze laatste uitdrukking wordt de formule van de Moivre genoemd.*

We kunnen de formule van de Moivre gebruiken om  $n$ -de machtswortels uit een complex getal  $z = a + bj$  te trekken, dit wil zeggen om complexe getallen  $w$  te zoeken waarvoor geldt dat  $w^n = z$ , of de oplossingen te zoeken van de vergelijking  $x^n = a + bj$ . Stel hiervoor dat  $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$  de goniometrische vorm is van het complex getal  $a + bj$ . Het is dan duidelijk dat de getallen

$$r^{\frac{1}{n}} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

de  $n$ -de machtswortels zijn uit het complex getal  $z$ . Deze complexe getallen vormen een regelmatige  $n$ -hoek in het complexe vlak.

**Voorbeeld 4.** Om de derdemachtswortels te berekenen uit het getal  $z = 8j$  berekenen we eerst de goniometrische vorm van dit getal. Deze wordt gegeven door

$$8j = 8\left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

De derdemachtswortels van dit getal zijn dan

$$2\left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}\right), \quad 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6}\right), \quad 2\left(\cos \frac{9\pi}{6} + j \sin \frac{9\pi}{6}\right).$$

**Voorbeeld 5.** De vierkantsvergelijking  $x^2 + 2jx + j = 0$  heeft discriminant

$$D = (2j)^2 - 4j = -4 - 4j.$$

Om de oplossingen van de vergelijking te bepalen moeten we de vierkantswortels uit deze discriminant berekenen. De goniometrische vorm van de discriminant wordt gegeven door

$$D = \sqrt{8}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4}\right),$$

en de vierkantswortels zijn bijgevolg

$$w_1 = \sqrt[4]{8}\left(\cos \frac{5\pi}{8} + j \sin \frac{5\pi}{8}\right), \quad w_2 = \sqrt[4]{8}\left(\cos \frac{13\pi}{8} + j \sin \frac{13\pi}{8}\right).$$

De oplossingen van de vierkantsvergelijking zijn daarom van de vorm

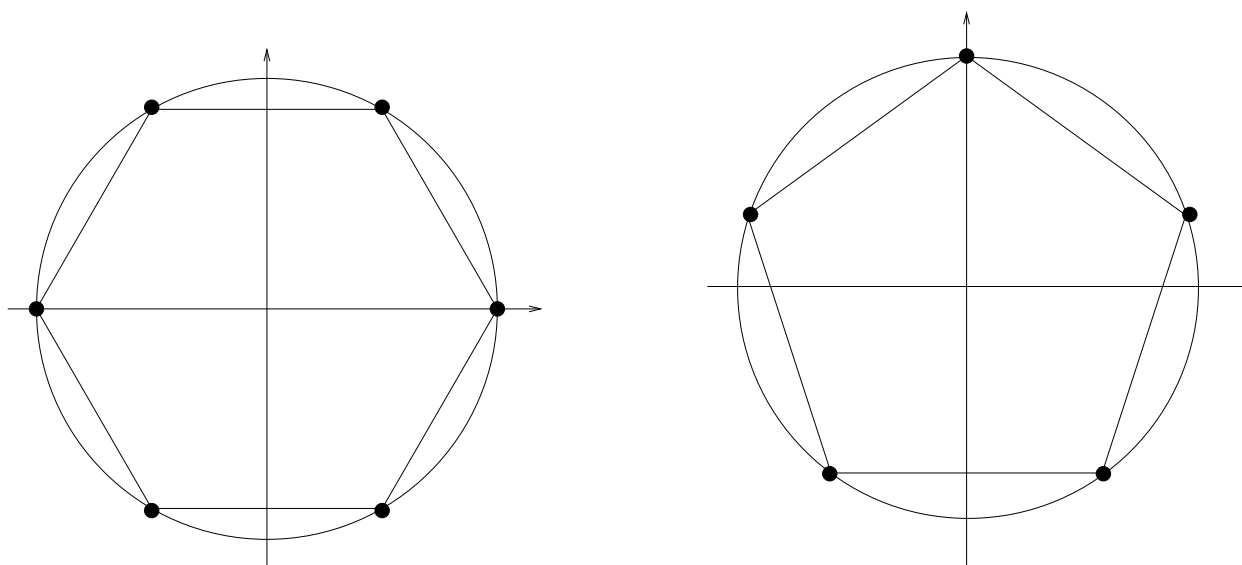
$$\frac{-2j + w_1}{2}, \quad \frac{-2j + w_2}{2}.$$

**Voorbeeld 6.** De getallen

$$\cos \frac{2\pi k}{n} + j \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

vormen de  $n$ -de machtswortels uit het getal 1 (met modulus  $r = 1$  en argument  $\theta = 0$ ), en dus de  $n$  verschillende oplossingen van de vergelijking

$$x^n - 1 = 0.$$



Figuur 41. De zesde machtswortels uit 1 en de vijfde machtswortels uit  $j$ .

## 5. Exponentiële voorstelling

In Hoofdstuk 8 zagen we dat

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \\ \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots, \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

Als we in de laatste uitdrukking  $x$  vervangen door  $j\theta$  vinden we de *formule van Euler*:

$$\begin{aligned}e^{j\theta} &= 1 + j\frac{\theta}{1!} + j^2\frac{\theta^2}{2!} + j^3\frac{\theta^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &\quad + j\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \cos \theta + j \sin \theta.\end{aligned}$$

We kunnen complexe getallen daarom ook voorstellen op een derde manier, die we meestal de *exponentiële voorstelling* zullen noemen. Deze voorstelling wordt gegeven door

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta} = e^{\ln r + j\theta},$$

en het is duidelijk dat

$$e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y).$$

Deze schrijfwijze voor complexe getallen is zeer interessant voor bepaalde toepassingen, omdat ze ons toelaat op een zeer eenvoudige wijze te rekenen met complexe getallen. We zien immers dat

$$\begin{aligned}r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} &= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}, \\ \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}, \\ (r e^{j\theta})^n &= r^n e^{jn\theta},\end{aligned}$$

en we besluiten dus dat we met complexe getallen in exponentiële voorstelling mogen werken zoals met exponentiële functies met reële exponenten. Bovendien zijn de  $n$ -de machtswortels van het getal  $re^{j\theta}$  gegeven door

$$r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Voorbeeld 7.** De formules geven aan dat

$$e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1, \quad e^{3+j\frac{\pi}{2}} = e^3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = je^3.$$



# HOOFDSTUK 10

## ONBEPAAALDE INTEGRATIE

### 1. Inleiding

In wat voorafgaat hebben we de afgeleide functie van een reële functie  $y = f(x)$  ingevoerd. In dit hoofdstuk zullen we de inverse bewerking van het berekenen van de afgeleide functie invoeren. We zoeken, met andere woorden, de functies  $F(x)$  waarvan de afgeleide een gegeven functie  $f(x)$  is. Deze bewerking, die we (*onbepaalde*) *integratie* noemen, zal een centrale rol spelen bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Elke reële functie  $F(x)$  waarvoor geldt dat

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

wordt een *onbepaalde integraal* of een *primitieve functie* van  $f$  genoemd. Een primitieve functie is duidelijk niet uniek. Immers, indien  $F$  een primitieve functie is van de functie  $f$  en  $C$  een willekeurige reële constante, dan is de functie  $F(x) + C$  opnieuw een primitieve functie van  $f(x)$ . We bekomen met andere woorden een ganse familie van primitieve functies van de vorm

$$F(x) + C,$$

waarbij  $F(x)$  een primitieve functie is en  $C$  een willekeurige constante, die we een *integratieconstante* noemen. De verzameling van *alle* primitieve functies wordt meestal *de onbepaalde integraal* genoemd, en deze wordt aangeduid met

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

**Voorbeeld 1.** De functie  $f(x) = 2x$  heeft de functie  $F(x) = x^2$  als een primitieve functie. Elke functie van de vorm  $x^2 + C$  is echter ook een primitieve functie, en we zeggen dat

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

In de rest van dit hoofdstuk worden een aantal technieken verzameld die kunnen worden gebruikt om, voor bepaalde types van functies, de onbepaalde integraal te berekenen.

## 2. Basisintegralen

De volgende integralen kunnen onmiddellijk worden berekend aan de hand van de formules voor afgeleiden die we in vorige hoofdstukken hebben verzameld.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad -1 \neq n \in \mathbb{R},$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$$



Volgende integralen zullen verder in dit hoofdstuk berekend worden, maar kunnen in praktische problemen eventueel ook als basisintegralen worden beschouwd.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \\ \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx &= \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \\ \int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cotg x \right| + C, \\ \int \frac{1}{\cos x} dx &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| + C.\end{aligned}$$

### 3. De substitutiemethode

Eén van de meest fundamentele en meest gebruikte methodes bij het berekenen van een onbepaalde integraal is de *substitutiemethode*. Hierbij tracht men de variabele  $x$  te vervangen door een nieuwe variabele  $t$ . Indien deze nieuwe variabele oordeelkundig wordt gekozen, kan de oorspronkelijke onbepaalde integraal vaak herleid worden tot een onbepaalde integraal van een eenvoudiger type, die met een andere methode kan worden opgelost.

Stel dus dat we een functie  $f(x)$  gegeven krijgen, en dat we

$$\int f(x) dx$$

moeten berekenen. Indien we een nieuwe variabele  $t$  definiëren door te stellen dat  $x = \varphi(t)$ , zien we dat

$$dx = \varphi'(t) dt.$$

We kunnen de oorspronkelijke integraal dan vervangen door

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Als we deze onbepaalde integraal kunnen berekenen, bekommen we een primitieve functie  $F(t) + C$ , waarin we  $t$  tenslotte vervangen door  $\varphi^{-1}(x)$ .

**Voorbeeld 2.** Om de onbepaalde integraal

$$\int \frac{1}{x+5} dx$$

te berekenen stellen we

$$x + 5 = t, \quad \text{of} \quad x = t - 5.$$

We zien dan dat

$$dx = dt,$$

en de te berekenen integraal levert ons

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C.$$

Als we  $t$  opnieuw vervangen door  $t = x + 5$  vinden we

$$\int \frac{1}{x+5} dx = \ln |x+5| + C.$$

**Voorbeeld 3.** We berekenen

$$\int \sin 2x dx.$$

We stellen eerst dat

$$2x = t, \quad x = \frac{1}{2}t,$$

en bijgevolg is

$$dx = \frac{1}{2}dt.$$

De integraal wordt dan

$$\int \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C,$$

en opnieuw  $t$  vervangen levert ons

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

**Voorbeeld 4.** We berekenen

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

De substitutie

$$\frac{x}{a} = t, \quad x = at, \quad dx = a dt,$$

levert dan de integraal

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C.$$

Als we  $t$  opnieuw vervangen, vinden we

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

**Voorbeeld 5.** Berekenen we vervolgens

$$\int x \cos x^2 dx.$$

De substitutie

$$x^2 = t, \quad 2x dx = dt,$$

levert ons

$$\int \cos t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin x^2 + C.$$

## 4. Partiële integratie

De afgeleide van een product van twee functies wordt gegeven door

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

en dit impliceert onmiddellijk dat

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x)dx &= \int (f(x)g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

We kunnen met andere woorden een integraal van een product van twee functies vervangen door een andere integraal, waarbij we één der factoren hebben geïntegreerd, en de andere hebben afgeleid. We moeten hierbij wel een “correctieterm” invoeren, waarvoor echter geen integratie meer vereist is. Indien de functies  $f'(x)$  en  $g(x)$  oordeelkundig worden bepaald, zal de resterende onbepaalde integraal vaak eenvoudiger te berekenen zijn dan de oorspronkelijke.

**Voorbeeld 6.** Om de integraal

$$\int x \sin x dx$$

te berekenen stellen we

$$f'(x) = \sin x, \quad g(x) = x.$$

Dan volgt onmiddellijk dat

$$f(x) = -\cos x, \quad g'(x) = 1,$$

en dus is

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 7.** We berekenen

$$\int x e^x dx.$$

We stellen daarvoor

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = x.$$

Dan is

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 1,$$

en bijgevolg is

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

**Voorbeeld 8.** We berekenen

$$\int x^2 \ln x dx.$$

We stellen hierbij

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2, & g(x) &= \ln x, \\ f(x) &= \frac{x^3}{3}, & g'(x) &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

en we bekomen

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

We kunnen deze methode ook gebruiken voor het berekenen van integralen van een aantal functies waarvan we enkel de afgeleide kennen.

**Voorbeeld 9.** Om de integraal

$$\int \operatorname{arctg} x dx$$

te berekenen stellen we

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

en dus is

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

We bekomen dan

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

We voeren vervolgens een substitutie uit

$$t = x^2 + 1, \quad dt = 2x dx,$$

en we bekomen

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \end{aligned}$$

We besluiten dat

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

In sommige gevallen wordt de integraal na partiële integratie niet eenvoudiger maar blijft hij “van hetzelfde type”. In deze gevallen kan men vaak, door het tweemaal toepassen van partiële integratie, een uitdrukking bekomen waarin de gezochte integraal zowel in het linker- als in het rechterlid voorkomt, met een verschillende coëfficiënt. Men kan de integraal in dat geval uit deze uitdrukking berekenen.

**Voorbeeld 10.** We berekenen

$$\int e^x \sin 2x dx.$$

We stellen daarvoor

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = \sin 2x,$$

en dus is

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 2 \cos 2x.$$

We vinden dus dat

$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx.$$

Op dezelfde manier kunnen we nu

$$\int e^x \cos 2x dx$$

berekenen door te stellen dat

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = \cos 2x,$$

en

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = -2 \sin 2x,$$

waarbij we vinden dat

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx.$$

Als we dit invullen vinden we dat

$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4 \int e^x \sin 2x dx,$$

waaruit volgt dat

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + C.$$

## 5. Integratie van rationale functies

Een *rationale functie* is van de vorm

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

waarbij  $P_n(x)$  een veelterm is van graad  $n$  en  $Q_m(x)$  een veelterm van graad  $m$ . In deze paragraaf zullen we aantonen dat we *elke* rationale functie kunnen integreren. We zullen dit doen door de rationale functie te herschrijven als een *som* van een *veeltermfunctie* en een stel eenvoudigere, rationale functies, die we *partiële breuken* noemen. We kunnen dan de integraal van de rationale functie berekenen als de som van de integralen van de verschillende componenten.

We zullen dus veronderstellen dat we een rationale functie

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

gegeven krijgen, waarvan we de onbepaalde integraal moeten berekenen. We gaan hierbij te werk in een aantal opeenvolgende stappen.

### 1. Graad van de teller groter dan of gelijk aan graad van de noemer

Indien  $n \geq m$  wordt de rationale functie *oneigenlijk* genoemd. We kunnen een oneigenlijke rationale functie steeds schrijven als een som

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{S(x)}{Q_m(x)}$$

van een veeltermfunctie  $R_{n-m}(x)$  van graad  $n - m$  en een *eigenlijke* rationale functie, dit is een rationale functie waarvoor de graad van de teller kleiner is dan die van de noemer. We voeren hiervoor een *Euclidische deling* van de veeltermen  $P_n$  en  $Q_m$  uit. De veelterm  $R_{n-m}(x)$  is dan het quotiënt van deze deling, terwijl  $S$  de rest vormt. De berekening van de integraal van een oneigenlijke rationale functie is bijgevolg herleid tot de berekening van de integraal van de veeltermfunctie en de integraal van een eigenlijke rationale functie.

**Voorbeeld 11.** De oneigenlijke rationale functie

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1},$$

kan geschreven worden als

$$f(x) = (x-1) + \frac{1}{x+1}.$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+1} dx &= \int \left( (x-1) + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 12.** Op dezelfde manier schrijven we

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} = (x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1},$$

en bijgevolg is

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \arctg(x) + C.$$

## 2. Splitsing in partiële breuken

Elke *eigenlijke* rationale functie kan vervolgens geschreven worden als een som van één of meerdere *partiële breuken*. Dit zijn eenvoudige rationale functies van de vorm

$$\frac{A}{(ax + b)^n},$$

waarbij  $A$ ,  $a$  en  $b$  reële getallen zijn en  $n$  een natuurlijk getal verschillend van 0, of van de vorm

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

waarbij  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$  en  $c$  reële getallen zijn,  $n$  een van nul verschillend natuurlijk getal en waarbij de discriminant  $b^2 - 4ac$  van de vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

negatief is, zodat de kwadratische uitdrukking niet kan worden ontbonden in lineaire factoren (met reële coëfficiënten).

Om de verschillende partiële breuken te berekenen waarmee we onze rationale functie schrijven moeten we eerst de noemer  $Q_m(x)$  van de rationale functie splitsen in factoren  $a_i x + b_i$  van de eerste graad en factoren  $\bar{a}_i x^2 + \bar{b}_i x + \bar{c}_i$  van de tweede graad die niet verder kunnen worden ontbonden, dus waarvoor de discriminant negatief is. (Dit is, tenminste in theorie, steeds mogelijk.) We vinden dan in het algemeen een ontbinding van de vorm

$$Q_m(x) = (a_1 x + b_1)^{n_1} \cdot (a_2 x + b_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (a_k x + b_k)^{n_k} \cdot (\bar{a}_1 x^2 + \bar{b}_1 x + \bar{c}_1)^{\bar{n}_1} \cdot (\bar{a}_2 x^2 + \bar{b}_2 x + \bar{c}_2)^{\bar{n}_2} \cdot \dots \cdot (\bar{a}_l x^2 + \bar{b}_l x + \bar{c}_l)^{\bar{n}_l}.$$

**Voorbeeld 13.** De volgende voorbeelden schetsen de ontbinding in factoren van een aantal veeltermen in het hierboven beschreven kader:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= (x - 2)(x + 2), \\ x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)^2(x + 1), \\ x^4 + 3x^2 + 2 &= (x^2 + 1)(x^2 + 2), \\ x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 &= (x + 1)(x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

De bovenstaande ontbinding in factoren van de noemer  $Q_m(x)$  van de eigenlijke rationale functie laat ons nu toe de rationale functie te schrijven als een som van partiële breuken. Elke factor uit de ontbinding van de noemer zal hierbij aanleiding geven tot één of meerdere termen in deze som. Deze termen worden als volgt bepaald.

1. Elke lineaire factor van de vorm  $ax + b$  die juist één keer voorkomt in de ontbinding geeft aanleiding tot één partiële breuk van de vorm

$$\frac{A}{ax + b}.$$

2. Indien een lineaire factor  $ax + b$  in de ontbinding  $n$  keer voorkomt, met andere woorden indien we bij de ontbinding in factoren  $(ax + b)^n$  vinden, geeft dit aanleiding tot een som van  $n$  partiële breuken van de vorm

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}.$$

3. Elke (niet-ontbindbare) kwadratische factor  $ax^2 + bx + c$  die één keer voorkomt in de ontbinding van de noemer geeft aanleiding tot één partiële breuk van de vorm

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

4. Als een kwadratische term tenslotte tot de  $n$ -de macht voorkomt in de ontbinding, geeft die opnieuw aanleiding tot een som van partiële breuken van de vorm

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Als we bovenstaande constructie toepassen voor elk van de verschillende factoren in de ontbinding bekomen we uiteindelijk een som van een aantal partiële breuken, waarvan de tellers onbepaalde coëfficiënten bevatten. Deze coëfficiënten moeten dan zó bepaald worden dat de som van al deze partiële breuken gelijk is aan de oorspronkelijke eigenlijke rationale functie. Om deze coëfficiënten te berekenen, zetten we de som van partiële breuken op gelijke noemer ( $Q_m(x)$ ) en vergelijken we de teller van deze uitdrukking met de teller van onze rationale functie. Als we de coëfficiënten van de verschillende machten van  $x$  in beide uitdrukkingen gelijk stellen, bekomen we een stelsel van vergelijkingen in de onbepaalde coëfficiënten. Dit stelsel heeft een (unieke) oplossing, die alle onbepaalde coëfficiënten uit onze constructie volledig vastlegt.

We kunnen besluiten dat elke eigenlijke rationale functie kan geschreven worden als een som van partiële breuken. Bijgevolg is het probleem van de integratie van rationale functies nu herleid tot het integreren van de verschillende types van partiële breuken.

**Voorbeeld 14.** Om de eigenlijke rationale functie

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$

te integreren zullen we deze eerst ontbinden in partiële breuken. De ontbinding van de noemer wordt gegeven door

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

en we kunnen de functie bijgevolg schrijven als een som van twee partiële breuken

$$\frac{x + 1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}.$$

Om de onbepaalde coëfficiënten  $A$  en  $B$  te berekenen zetten we het rechterlid van deze uitdrukking op gelijke noemer en we zien dat

$$\frac{x + 1}{x^2 - 4} = \frac{Ax + 2A + Bx - 2B}{x^2 - 4}.$$



Als we de coëfficiënten van de tellers van deze uitdrukkingen vergelijken, kunnen we besluiten dat

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2A - 2B = 1. \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{4},$$

en bijgevolg is

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}.$$

We kunnen dan ook stellen dat

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-4} dx &= \int \left( \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)} \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 15.** Om de integraal

$$\int \frac{5x^2 + 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

te berekenen splitsen we de eigenlijke rationale functie eerst in partiële breuken. De ontbinding van de noemer van deze functie is

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1).$$

De kwadratische term in deze ontbinding heeft negatieve discriminant en is dus niet verder te ontbinden. We kunnen daarom stellen dat

$$\frac{5x^2 + 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Als we het rechterlid op gelijke noemer brengen zien we dat

$$\frac{5x^2 + 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)}{x^3 - x^2 + x - 1},$$

en we besluiten dat

$$\begin{cases} A + B = 5, \\ -B + C = 3, \\ A - C = 2. \end{cases}$$

Dit stelsel geeft als oplossing

$$A = 5, \quad B = 0, \quad C = 3,$$

en bijgevolg is

$$\int \frac{5x^2 + 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int \frac{5}{x-1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx = 5 \ln |x-1| + 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

**Voorbeeld 16.** We berekenen

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^2(x+2)} dx.$$

Uit de ontbinding van de noemer van de rationale functie besluiten we dat

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Op gelijke noemer zetten levert dan

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)},$$

en we vinden het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} A + C = 2, \\ A + B - 2C = 1, \\ -2A + 2B + C = 3. \end{cases}$$

Bijgevolg is

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 1,$$

en dus is

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^2(x+2)} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \ln |x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln |x+2| + C. \end{aligned}$$

### 3. Integratie van de partiële breuken

We hebben hierboven aangetoond dat elke eigenlijke rationale functie kan gesplitst worden in een som van partiële breuken van verschillende types, en dat het integreren van een rationale functie dus kan herleid worden tot het integreren van partiële breuken. Voor elk van de verschillende types partiële breuken zullen we tenslotte nagaan hoe we deze kunnen integreren.

Het eerste type van partiële breuken is van de vorm

$$\frac{A}{ax + b}.$$

Om de integraal van dergelijke partiële breuken te berekenen volstaat het een substitutie van de vorm

$$t = ax + b, \quad x = \frac{t - b}{a}, \quad dx = \frac{1}{a} dt,$$

toe te passen.

**Voorbeeld 17.** We berekenen

$$\int \frac{5}{3x + 7} dx.$$

De substitutie

$$t = 3x + 7, \quad x = \frac{t - 7}{3}, \quad dx = \frac{1}{3} dt,$$

levert ons dan dat

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{3x + 7} dx &= \frac{5}{3} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{5}{3} \ln |t| + C \\ &= \frac{5}{3} \ln |3x + 7| + C. \end{aligned}$$

Het tweede type partiële breuken is van de vorm

$$\frac{A}{(ax + b)^n}, \quad n \neq 1.$$

De integralen van dergelijke rationale functies kunnen, zoals het eerste type, berekend worden door een substitutie van de vorm  $t = ax + b$ .

**Voorbeeld 18.** Om de integraal

$$\int \frac{5}{(3x + 7)^6} dx$$

te berekenen stellen we opnieuw

$$t = 3x + 7.$$

We vinden dan

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{(3x+7)^6} dx &= \frac{5}{3} \int \frac{1}{t^6} dt \\ &= \frac{5}{3} \left( \frac{1}{-5t^5} \right) + C \\ &= -\frac{1}{3t^5} + C \\ &= -\frac{1}{3(3x+7)^5} + C. \end{aligned}$$

Het derde type van partiële breuken is van de vorm

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Om de integraal van dergelijke rationale functies te berekenen splitsen we deze functie in twee stukken. We schrijven daartoe de teller van de breuk als een veelvoud van de afgeleide van de noemer en een getal, dus

$$Ax + B = \alpha(2ax + b) + \beta.$$

Het eerste deel van de integraal is dan van de vorm

$$\int \frac{\alpha(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} dx = \alpha \ln |ax^2 + bx + c| + C.$$

Na vooraanstellen van de nodige constanten wordt het tweede deel van de integraal geschreven in de vorm

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Door eventueel te vermenigvuldigen met een goed gekozen getal (dat we eveneens buiten de integraal brengen) kunnen we de noemer van deze breuk steeds schrijven in de vorm

$$1 + \left( \frac{x + \lambda}{\mu} \right)^2.$$

Een substitutie van de vorm

$$t = \frac{x + \lambda}{\mu}$$

laat ons dan toe deze integraal te berekenen.

**Voorbeeld 19.** De integraal

$$\int \frac{4x + 5}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

We schrijven eerst en vooral de teller van deze breuk als

$$4x + 5 = 2(2x + 2) + 1,$$

en bijgevolg is

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+5}{x^2+2x+5} dx &= 2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= 2 \ln|x^2+2x+5| + \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx.\end{aligned}$$

Om het tweede deel van deze integraal te berekenen merken we op dat

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4\left(1 + \frac{1}{4}(x+1)^2\right) = 4\left(1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right).$$

De integraal kan bijgevolg geschreven worden als

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} dx.$$

We substitueren hierin

$$t = \frac{x+1}{2}, \quad x = 2t - 1, \quad dx = 2dt,$$

en we bekomen

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t^2} 2dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

De volledige integraal is dus van de vorm

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+5} dx = 2 \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Het laatste type van partiële breuken is van de vorm

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad n \neq 1.$$

In dit geval kunnen we opnieuw de teller schrijven als

$$Ax+B = \alpha(2ax+b) + \beta,$$

waardoor we de integraal in twee delen kunnen opsplitsen. Het eerste deel is van de vorm

$$\int \frac{\alpha(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \alpha \frac{1}{(-n+1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C.$$

Voor de integratie van het tweede deel passen we dezelfde techniek toe die we hebben gebruikt bij het vorige type. Na substitutie en vooraanstellen van de nodige constanten bekomen we dan een integraal van de vorm

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

Deze integraal kan worden opgelost door middel van een goniometrische substitutie, die we verderop in dit hoofdstuk zullen behandelen.

**Voorbeeld 20.** De integraal

$$\int \frac{4x + 5}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx.$$

We schrijven eerst en vooral de teller van deze breuk opnieuw als

$$4x + 5 = 2(2x + 2) + 1,$$

en bijgevolg is

$$\begin{aligned} \int \frac{4x + 5}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx &= 2 \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx \\ &= -\frac{2}{x^2 + 2x + 5} + \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx. \end{aligned}$$

Om het tweede deel van deze integraal te berekenen merken we opnieuw op dat

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4\left(1 + \frac{1}{4}(x + 1)^2\right) = 4\left(1 + \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2\right).$$

De integraal kan bijgevolg geschreven worden als

$$\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx = \frac{1}{16} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)^2} dx.$$

We substitueren hierin

$$t = \frac{x + 1}{2}, \quad x = 2t - 1, \quad dx = 2dt,$$

en we bekommen

$$\frac{1}{16} \int \frac{1}{(1 + t^2)^2} 2dt = \frac{1}{8} \int \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Deze laatste integraal kan worden berekend door middel van een goniometrische substitutie  $t = \operatorname{tg} u$ . Deze techniek wordt later in dit hoofdstuk behandeld.

## 6. Integratie van goniometrische functies

Voor het integreren van goniometrische functies bestaan er, naast de hierboven behandelde standaardmethodes (basisintegralen, substitutie en partiële integratie), een aantal bijzondere technieken, waarvan we er in deze paragraaf enkele behandelen.

Een eerste techniek maakt gebruik van gekende relaties (*goniometrische identiteiten*) tussen verschillende goniometrische functies (zoals de verdubbelingsformules en de formules van Simpson) om een gegeven functie te herleiden tot een goniometrische functie waarvan de integraal kan worden berekend door andere technieken. De meest gebruikte formules worden in de volgende tabel samengevat:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)), \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).\end{aligned}$$

**Voorbeeld 21.** We kunnen deze formules gebruiken om aan te tonen dat

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

**Voorbeeld 22.** Verder is ook

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 5x + \sin(-x) dx \\ &= -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.\end{aligned}$$

Een andere speciale klasse van integralen van goniometrische functies is van de vorm

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

waarbij minstens één van de exponenten  $n$  of  $m$  oneven is. We veronderstellen dat  $m$  oneven is. Dan is  $m - 1$  een even getal, en we kunnen deze integraal dan schrijven als

$$\int \sin^n x \cos^{m-1} x \cos x dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos x dx.$$

Een substitutie van de vorm

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x dx,$$

herleidt dergelijke integralen tot integralen van rationale functies.

Dezelfde techniek kan ook worden gebruikt voor het integreren van functies van de vorm

$$\int R(\sin x) \cos x dx, \quad \int R(\cos x) \sin x dx,$$

waarbij  $R$  een rationale functie is.

**Voorbeeld 23.** Om de integraal

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

te berekenen voeren we een substitutie uit van de vorm

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x dx.$$

We bekommen dan

$$\begin{aligned} \int t^2(1-t^2)dt &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 24.** We berekenen

$$\int \frac{1}{\cos x} dx.$$

Indien we in teller en noemer van de functie met  $\cos x$  vermenigvuldigen vinden we

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx.$$

De substitutie

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x dx,$$

levert ons dan

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{1-t^2} dt,$$

en deze rationale functie integreren geeft

$$\frac{1}{2} \ln |1+t| - \frac{1}{2} \ln |1-t| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.$$

Een laatste methode voor het integreren van goniometrische functies maakt gebruik van de substitutie (soms de  $t$ -formules genoemd)

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$



Het is dan eenvoudig in te zien dat

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Als we deze substitutie toepassen kunnen we de goniometrische functie herleiden tot een rationale functie, waarvoor de techniek uit vorige paragraaf steeds een oplossing oplevert. Deze methode laat ons bijgevolg toe *elke* goniometrische integraal te berekenen, maar we dienen hierbij op te merken dat, in sommige gevallen, de berekening zeer ingewikkeld kan worden.

**Voorbeeld 25.** We berekenen

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

De substitutie  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  levert ons dan

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln |t| + C \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 26.** Op dezelfde manier vinden we dat

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

## 7. Goniometrische substituties

We weten dat de goniometrische functies  $\sin x$ ,  $\cos x$  en  $\operatorname{tg} x$  aan de volgende identiteiten voldoen:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 x &= \cos^2 x, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \frac{1}{\cos^2 x} - 1 &= \operatorname{tg}^2 x. \end{aligned}$$

Stel nu dat we een (irrationale) functie moeten integreren waarvan één der componenten van de vorm

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$$

is. Als we dan een substitutie van de vorm

$$x = \frac{a}{b} \sin t, \quad dx = \frac{a}{b} \cos t dt,$$

toepassen, wordt deze component van de vorm

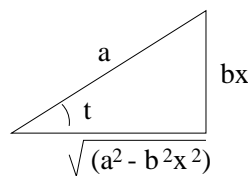
$$\sqrt{a^2 - b^2 \frac{a^2}{b^2} \sin^2 t} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t.$$

We kunnen bijgevolg een wortelvorm uit onze functie verwijderen door gebruik te maken van een dergelijke substitutie.

Om te berekenen hoe  $t$  wordt uitgedrukt als functie van  $x$  merken we op dat

$$\sin t = \frac{bx}{a}.$$

Als we  $t$  beschouwen als één van de hoeken van een rechthoekige driehoek, kunnen we hieruit afleiden dat  $bx$  de lengte van de overstaande rechthoekszijde en  $a$  de lengte van de schuine zijde van de driehoek moeten zijn. De lengte van de aanliggende rechthoekszijde wordt dan gegeven door  $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$ . We kunnen nu alle andere goniometrische functies hieruit afleiden.



Figuur 42. Inverse van een sinus- of cosinus-substitutie.

**Voorbeeld 27.** Om de integraal

$$\int \sqrt{4-x^2} dx$$

te berekenen gebruiken we een substitutie van de vorm

$$x = 2 \sin t, \quad dx = 2 \cos t dt.$$

De integraal wordt dan

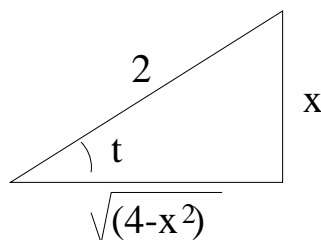
$$\int 4 \cos^2 t dt = \sin 2t + 2t + C = 2 \sin t \cos t + 2t + C.$$

Uit Figuur 43 volgt dat

$$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

en de integraal wordt bijgevolg

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.$$



Figuur 43. Berekenen van de omgekeerde substitutie.

Indien de functie een component bevat van de vorm

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2},$$

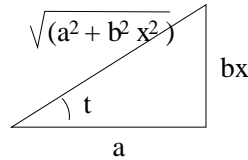
passen we een goniometrische substitutie toe waarbij

$$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{a}{b} \frac{1}{\cos^2 t} dt.$$

In dit geval wordt deze component vervangen door

$$\sqrt{a^2 + b^2 \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \frac{1}{\cos t},$$

en opnieuw is de wortelvorm bijgevolg verdwenen.



Figuur 44. Inverse substitutie van de tangens-substitutie.

**Voorbeeld 28.** Om de integraal

$$\int (4 + x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$$

te berekenen stellen we

$$x = 2 \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

We bekommen dan

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{4}{\cos^2 t} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{2}{\cos^2 t} dt &= \frac{1}{4} \int \cos t dt \\ &= \frac{1}{4} \sin t + C \\ &= \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} + C. \end{aligned}$$

De goniometrische substitutie

$$x = \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt,$$

kan ook gebruikt worden voor het integreren van de partiële breuken van de vorm

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx,$$

die de laatste klasse van partiële breuken vormen waarvoor we een integratiemethode moeten zoeken.

Indien er tenslotte een component

$$\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$$

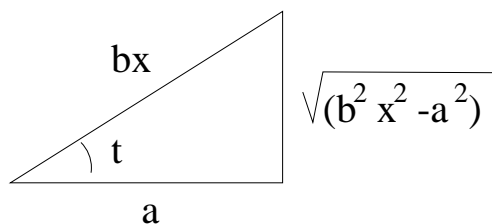
aanwezig is, stellen we een goniometrische substitutie voor van de vorm

$$x = \frac{a}{b \cos t}, \quad dx = \frac{a \sin t}{b \cos^2 t} dt.$$

Deze component wordt dan vervangen door

$$\sqrt{b^2 \frac{a^2}{b^2 \cos^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \operatorname{tg} t,$$

en opnieuw is de wortelvorm bijgevolg verdwenen.



Figuur 45. Inverse substitutie bepalen.

**Voorbeeld 29.** We berekenen

$$\int (x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

We stellen hiervoor

$$x = \frac{2}{\cos t}, \quad dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt,$$

en we vinden

$$\begin{aligned} \int (4 \operatorname{tg}^2 t)^{-\frac{3}{2}} \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt &= \frac{1}{4} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= -\frac{1}{4 \sin t} + C. \end{aligned}$$

Uit Figuur 45 volgt dat

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

en de integraal wordt dus gegeven door

$$-\frac{x}{4\sqrt{x^2 - 4}} + C.$$

## 8. Integratie van irrationale functies

Een andere klasse van functies waarvoor we een speciale integratietechniek kunnen gebruiken is de familie van irrationale functies die een component van de vorm

$$\sqrt[n]{ax + b}$$

bevatten. In dit geval kunnen we een substitutie uitvoeren van de vorm

$$z^n = ax + b, \quad x = \frac{z^n - b}{a}, \quad dx = \frac{nz^{n-1}}{a} dz,$$

waardoor de integraal herleid wordt tot een integraal van een rationale functie.

**Voorbeeld 30.** Om de integraal

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$$

te berekenen stellen we

$$z^2 = x - 1, \quad x = z^2 + 1, \quad dx = 2z dz,$$

waardoor de integraal kan berekend worden als

$$\begin{aligned} \int \frac{2z}{(z^2 + 1)\sqrt{z^2}} dz &= 2 \int \frac{1}{1 + z^2} dz \\ &= 2 \operatorname{arctg} z + C \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

We kunnen tenslotte ook functies integreren die een component van de vorm

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

bevatten. We kunnen dit doen door deze functie te herleiden tot een uitdrukking van de vorm

$$\sqrt{1+z^2}, \quad \sqrt{1-z^2}, \quad \sqrt{z^2}, \quad \sqrt{z^2-1}.$$

In elk van deze gevallen kan men de wortelvorm dan laten verdwijnen door het uitvoeren van een goniometrische substitutie.

**Voorbeeld 31.** Het is eenvoudig in te zien dat

$$\begin{aligned} 5 - 4x - x^2 &= 5 - (x^2 + 4x) \\ &= 5 - (x + 2)^2 + 4 \\ &= 9 - (x + 2)^2 \\ &= 9 \left( 1 - \left( \frac{x+2}{3} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\int \sqrt{5 - 4x - x^2} dx = \int 3 \sqrt{1 - \left( \frac{x+2}{3} \right)^2} dx.$$

Als we nu een substitutie

$$z = \frac{x+2}{3}, \quad x = 3z - 2, \quad dx = 3dz,$$

doorvoeren, bekomen we

$$\int 9\sqrt{1-z^2} dz,$$

en deze integraal kan worden opgelost door een goniometrische substitutie

$$z = \sin u, \quad dz = \cos u du.$$

# HOOFDSTUK 11

## BEPAAALDE INTEGRATIE

### 1. Definitie en basiseigenschappen

Beschouwen we een (stuksgewijs) continue functie  $y = f(x)$  die gedefinieerd is op het interval  $[a, b]$ . We kunnen het interval dan opdelen in  $n$  stukken door de keuze van  $n - 1$  punten in het inwendige van het interval,

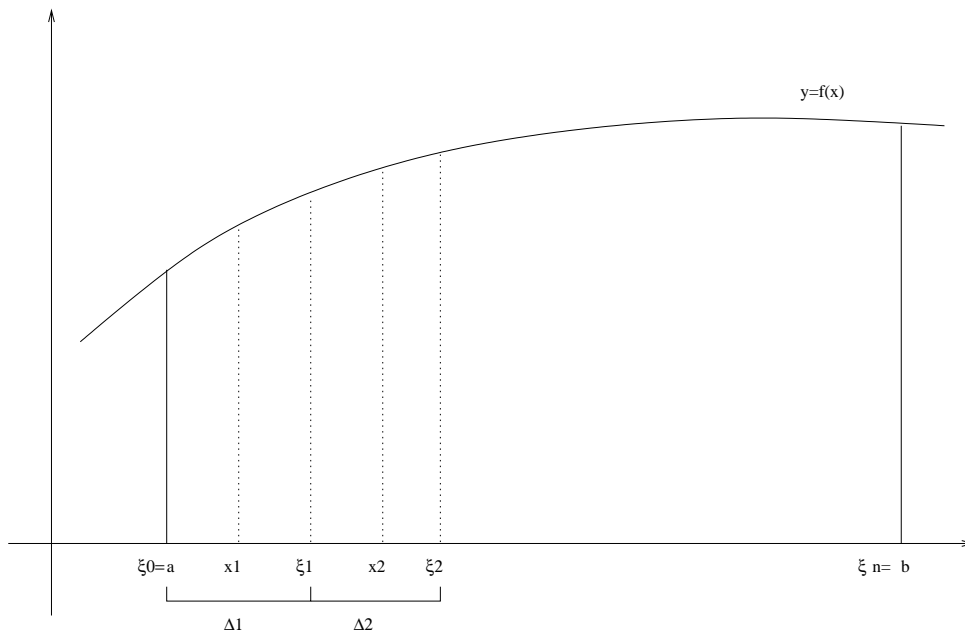
$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = b.$$

De lengte van elk interval geven we aan met

$$\Delta_i = \xi_i - \xi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

We kiezen verder in elk dergelijk deelinterval een willekeurig punt, dat we aanduiden met

$$x_i \in [\xi_{i-1}, \xi_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Figuur 46. *Bepaalde integraal van een functie.*

We definiëren tenslotte een som

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta_i = f(x_1)\Delta_1 + f(x_2)\Delta_2 + \dots + f(x_n)\Delta_n.$$

Stel nu dat we het aantal beschouwde deelintervallen  $n$  onbeperkt laten toenemen (we nemen dus de limiet voor  $n \rightarrow +\infty$ ), en er voor zorgen dat de lengte van elk deelinterval hierbij nadert naar 0. Men kan dan aantonen dat de limietwaarde voor de som  $S_n$  bestaat, en bovendien niet afhangt van de gekozen verdeling van het interval of van de keuze van het punt  $x_i$  in elk deelinterval. We noemen deze limietwaarde de *bepaalde integraal* van de functie  $y = f(x)$  tussen de punten  $x = a$  en  $x = b$ , en we noteren dit met

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

**Voorbeeld 1.** Beschouwen we de functie  $y = x$  en de grenswaarden  $a = 0$  en  $b = 4$ . Als we het interval in  $n$  gelijke delen verdelen, wordt de lengte van elk deelinterval gegeven door

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = \frac{4}{n}.$$

De grenswaarden van de deelintervallen worden gegeven door

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = \frac{4}{n}, \quad \xi_2 = 2\frac{4}{n}, \quad \dots, \quad \xi_i = i\frac{4}{n}, \quad \dots, \quad \xi_n = n\frac{4}{n} = 4.$$

In elk interval kiezen we tenslotte het punt

$$x_i = \xi_i = \frac{4i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Het is dan eenvoudig na te gaan dat

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{4i}{n} \frac{4}{n} \\
 &= \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{8(n^2+n)}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Het is dan ook duidelijk dat

$$\int_0^4 x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8(n^2+n)}{n^2} = 8.$$

Uit de definitie van de bepaalde integraal van een functie kunnen we onmiddellijk een aantal eigenschappen afleiden. Ten eerste is het eenvoudig na te gaan dat

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Verder is het duidelijk dat

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

en we stellen ook dat

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Tenslotte is het ook makkelijk aan te tonen dat

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

De *basisstelling van de integraalrekening* legt het verband tussen de bepaalde integraal van een functie en de onbepaalde integraal van deze functie, en laat ons toe de bepaalde integraal van een functie te berekenen aan de hand van een willekeurige primitieve functie van de gegeven functie. De stelling zegt immers dat

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

waarbij  $F(x)$  een primitieve functie is van  $f(x)$ , dit wil zeggen dat

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

**Voorbeeld 2.** De functie  $f(x) = x$  heeft als primitieve functie

$$F(x) = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Bijgevolg is

$$\int_0^4 xdx = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\Big|_0^4 = \left(\frac{16}{2} + C\right) - \left(\frac{0}{2} + C\right) = 8.$$

## 2. Oppervlakte van een vlakke figuur

Stel dat  $y = f(x)$  een (stuksgewijs) continue functie is die overal gedefinieerd is in het interval  $[a, b]$ . We veronderstellen ook dat de functie steeds positieve waarden aanneemt in dit interval. We kunnen dan de oppervlakte  $S$  berekenen van het gebied begrensd door de grafiek van de kromme, de  $x$ -as en de verticale rechten  $x = a$  en  $x = b$ . Hiervoor splitsen we het interval  $[a, b]$  in  $n$  stukken door de keuze van  $n - 1$  punten

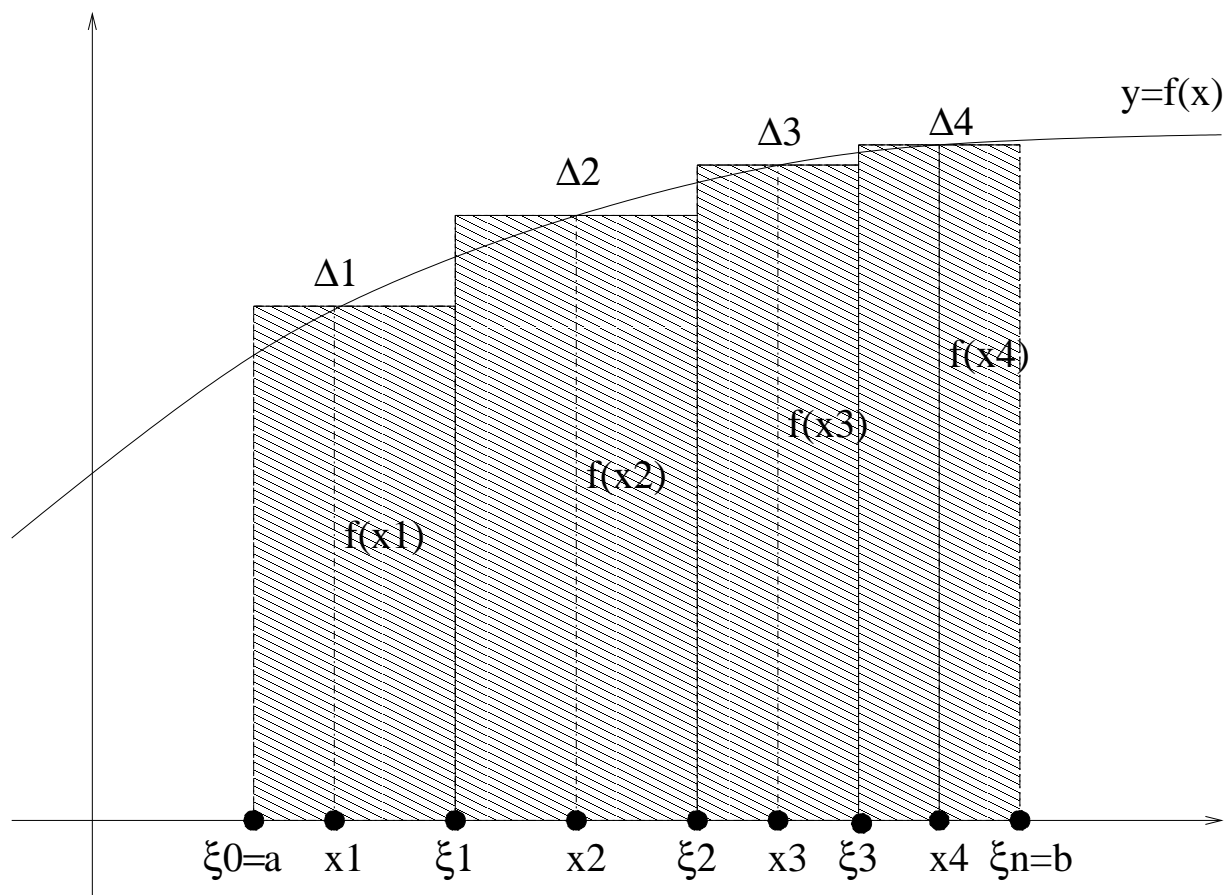
$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = b.$$

In elk interval kiezen we vervolgens een willekeurig punt  $x_i \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$ . De oppervlakte van het beschouwde gebied wordt dan benaderd door de som van de oppervlakten van de rechthoeken met basis  $\Delta_i = \xi_i - \xi_{i-1}$  en hoogte  $f(x_i)$ , dit wil zeggen door

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta_i.$$

Naarmate  $n$  groter wordt zullen we een nauwkeuriger benadering vinden voor de gezochte oppervlakte. Anderzijds wordt de limiet van de som, voor  $n$  naderend tot oneindig, gegeven door de bepaalde integraal van de functie  $f(x)$  tussen  $a$  en  $b$ . Het is dan ook duidelijk dat

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$



Figuur 47. Oppervlakte van een vlakke figuur.

**Voorbeeld 3.** We berekenen de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met basis  $B$  en hoogte  $H$ . Deze figuur wordt begrensd door de  $x$ -as, de rechte  $y = \frac{H}{B}x$  en de verticale rechte  $x = B$ . De oppervlakte wordt bijgevolg gegeven door

$$S = \int_0^B \frac{H}{B}x dx = \frac{H}{B} \frac{x^2}{2} \Big|_0^B = \frac{HB}{2}.$$

**Voorbeeld 4.** Het gebied begrensd door de kromme  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  en de  $x$ -as (samen met de verticale rechten  $x = \pm R$ ) vormt een halve cirkel. De oppervlakte van dit gebied wordt gegeven door

$$S = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left( \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} \right) \Big|_{-R}^{+R} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

De oppervlakte van de cirkel met straal  $R$  wordt bijgevolg gegeven door de gekende formule

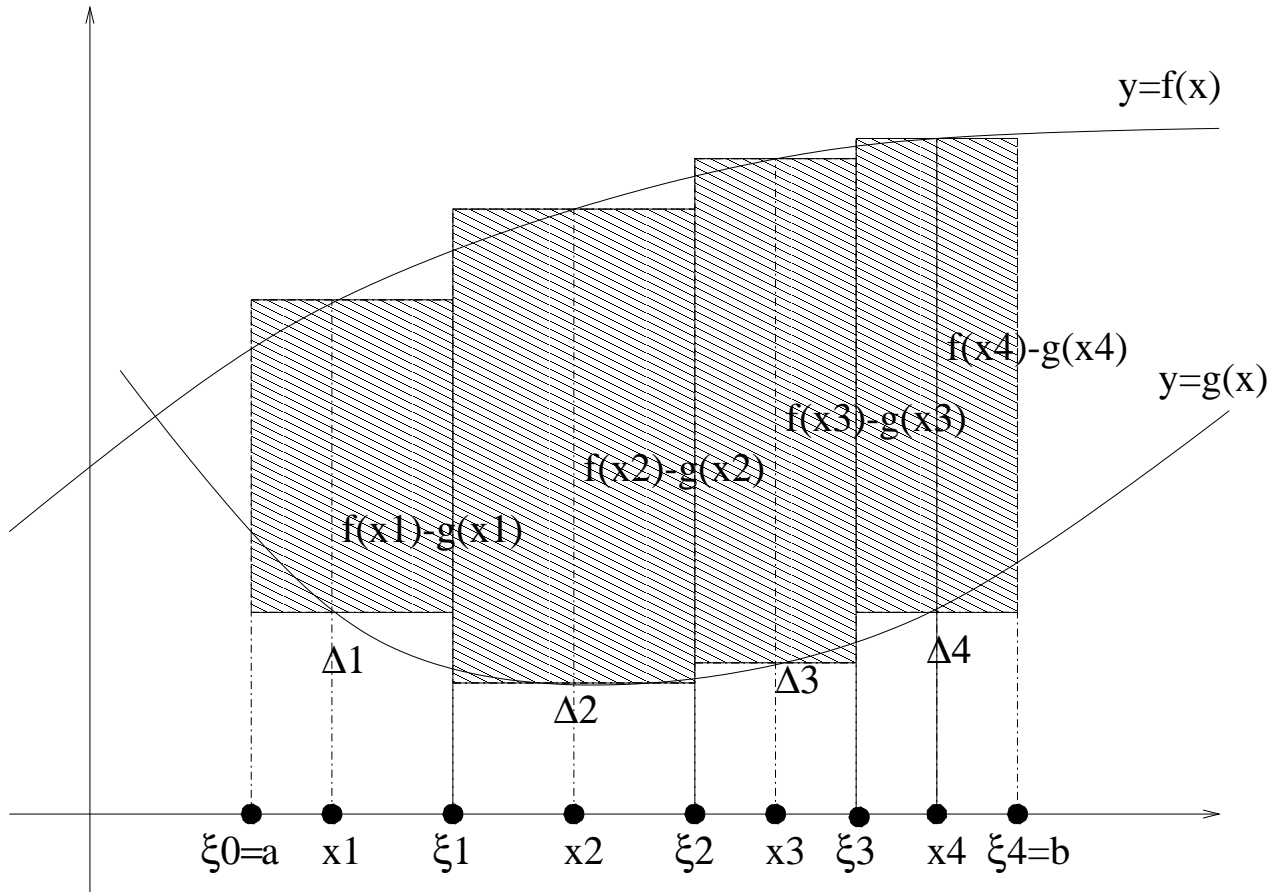
$$S = \pi R^2.$$

Indien het oppervlak zowel bovenaan als onderaan wordt begrensd door een functie, wordt de oppervlakte benaderd door de som van de oppervlakten van de rechthoeken met basis  $\Delta_i$  en hoogte  $f(x_i) - g(x_i)$ ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i (f(x_i) - g(x_i)),$$

en bijgevolg is

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



Figuur 48. Oppervlakte van een figuur tussen twee krommen.

**Voorbeeld 5.** De oppervlakte van het gebied tussen de krommen  $y = x^2$  en  $y = \sqrt{x}$  wordt gegeven door

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

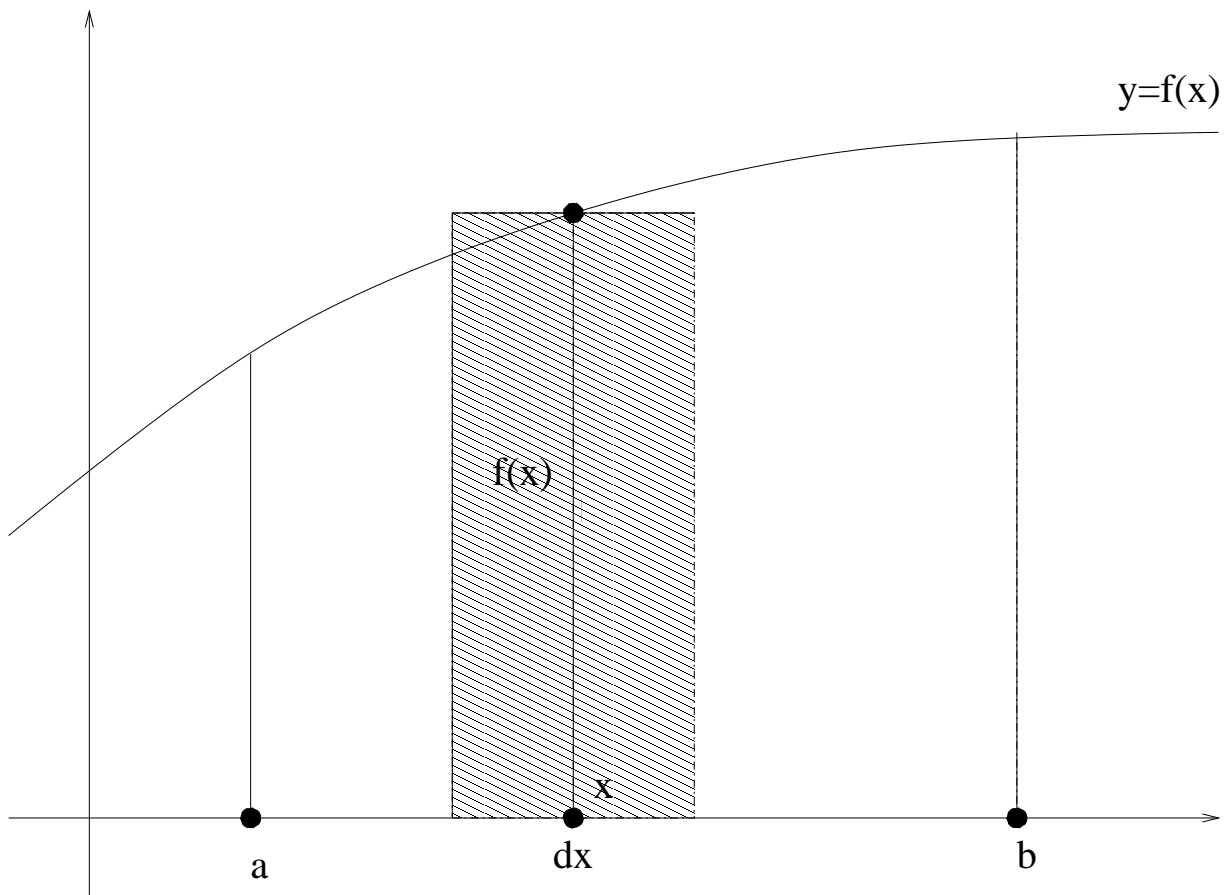
In voorgaande berekeningen wordt de gezochte oppervlakte eerst benaderd door een som van oppervlakten van rechthoeken die overeenkomen met een verdeling van een interval. Naarmate de verdeling van het interval fijner wordt, bekomt men een nauwkeuriger benadering van de gezochte oppervlakte. In de limiet komt deze operatie overeen met het berekenen van een bepaalde integraal. Deze techniek zal verder ook gebruikt worden bij de berekening van andere eigenschappen van figuren zoals volumes, lengtes en momenten. Om niet telkens de volledige techniek van opsplitsen, benaderen en berekenen van de limiet te moeten beschrijven zal men in de praktijk vaak werken met *elementaire rechthoeken*. Dit zijn rechthoeken met een “oneindig kleine” breedte  $dx$ . Men beschouwt met andere woorden onmiddellijk een oneindig fijne verdeling van het interval.

De bovenstaande berekening van de oppervlakte van een vlakke figuur kan dan als volgt beschreven worden. Voor ieder punt  $x$  tussen  $a$  en  $b$  beschouwt men een *elementaire rechthoek* met hoogte  $f(x)$  en breedte  $dx$ . De oppervlakte van deze elementaire rechthoek wordt gegeven door

$$dS = f(x)dx,$$

en de som over alle mogelijke waarden van  $x$  wordt berekend als

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Figuur 49. *Elementaire rechthoeken en oppervlakteberekening.*

### 3. Volume van een omwentelingslichaam

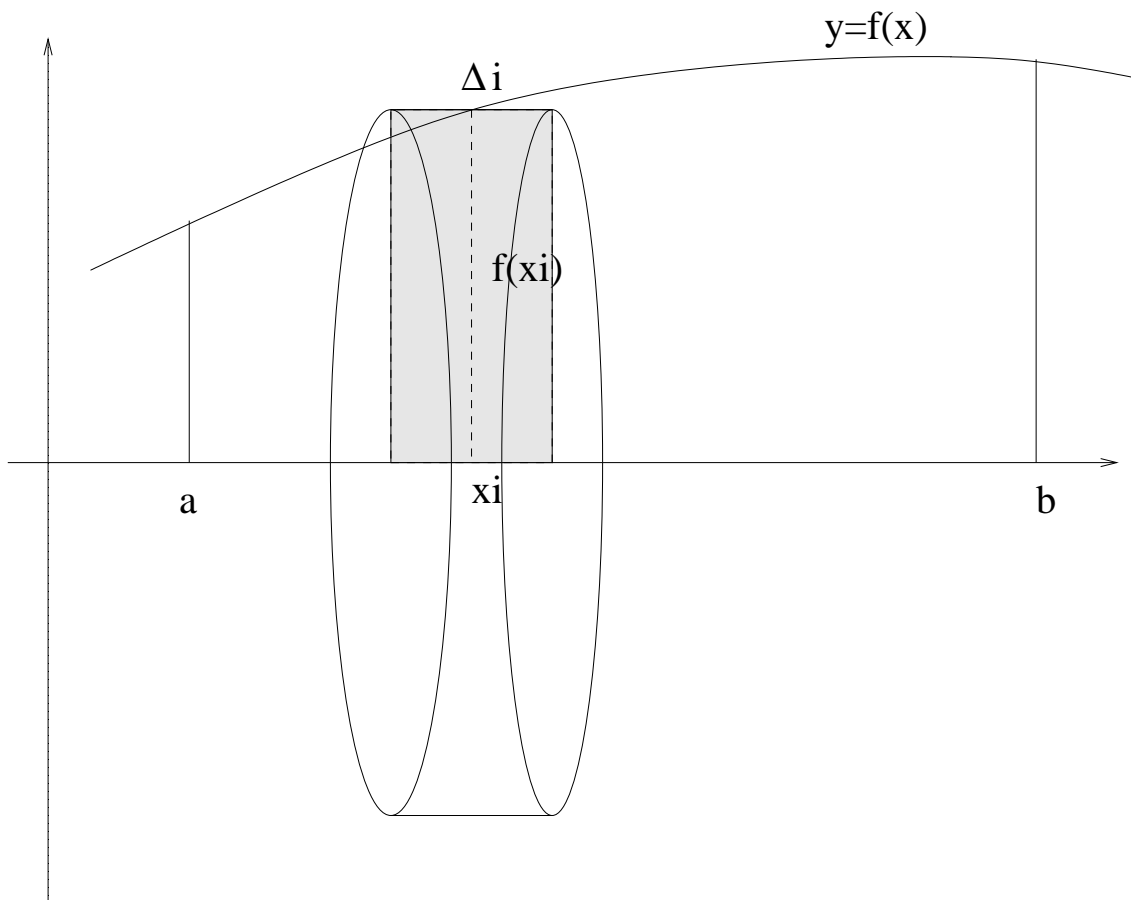
Een *omwentelingslichaam* is een figuur in de driedimensionale ruimte die we bekommen als we een vlakke figuur laten wentelen om een as die in dit vlak is gelegen.

Beschouwen we nu een kromme gegeven door de functie  $y = f(x)$ . Als we het gebied tussen de  $x$ -as en deze kromme (en de verticale rechten  $x = a$  en  $x = b$ ) laten wentelen rond de  $x$ -as bekommen we een omwentelingslichaam. Om het volume van een dergelijk lichaam te berekenen, splitsen we het (vlakke) gebied tussen de kromme  $y = f(x)$  en de  $x$ -as opnieuw op in rechthoeken. Elk van deze rechthoeken beschrijft dan, bij wenteling rond de  $x$ -as, een cilinder. De straal van het grondvlak van deze cilinder wordt gegeven door  $f(x_i)$  en de hoogte is  $\Delta_i$ . Het volume van het omwentelingslichaam wordt bijgevolg benaderd door de som van de volumes van de cilinders

$$\sum_{i=1}^n \pi f(x_i)^2 \Delta_i.$$

Als we het aantal rechthoeken naar oneindig laten naderen, vinden we dat het volume van het omwentelingslichaam gegeven wordt door

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Figuur 50. Volume van een omwentelingslichaam.

Opnieuw kunnen we deze berekening eenvoudiger beschrijven als volgt. Voor ieder punt  $x$  tussen  $a$  en  $b$  beschouwen we een elementaire rechthoek met breedte  $dx$  en hoogte  $f(x)$ . Bij wenteling beschrijft deze rechthoek een cilinder met volume

$$dV = \pi f(x)^2 dx,$$

en het totale volume wordt dus gegeven door

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

**Voorbeeld 6.** Als we de driehoek, gevormd door de rechte  $y = \frac{R}{H}x$ , de  $x$ -as en de verticale rechte  $x = H$  laten wentelen rond de  $x$ -as bekomen we een kegel met hoogte  $H$  en straal  $R$ . Het volume van dit omwentelingslichaam wordt gegeven door

$$V = \int_0^H \pi \left( \frac{R}{H}x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

**Voorbeeld 7.** Een bol met straal  $R$  is een omwentelingslichaam dat we bekomen door de halve cirkel met vergelijking  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  te laten wentelen rond de  $x$ -as. Het volume van de bol wordt gegeven door

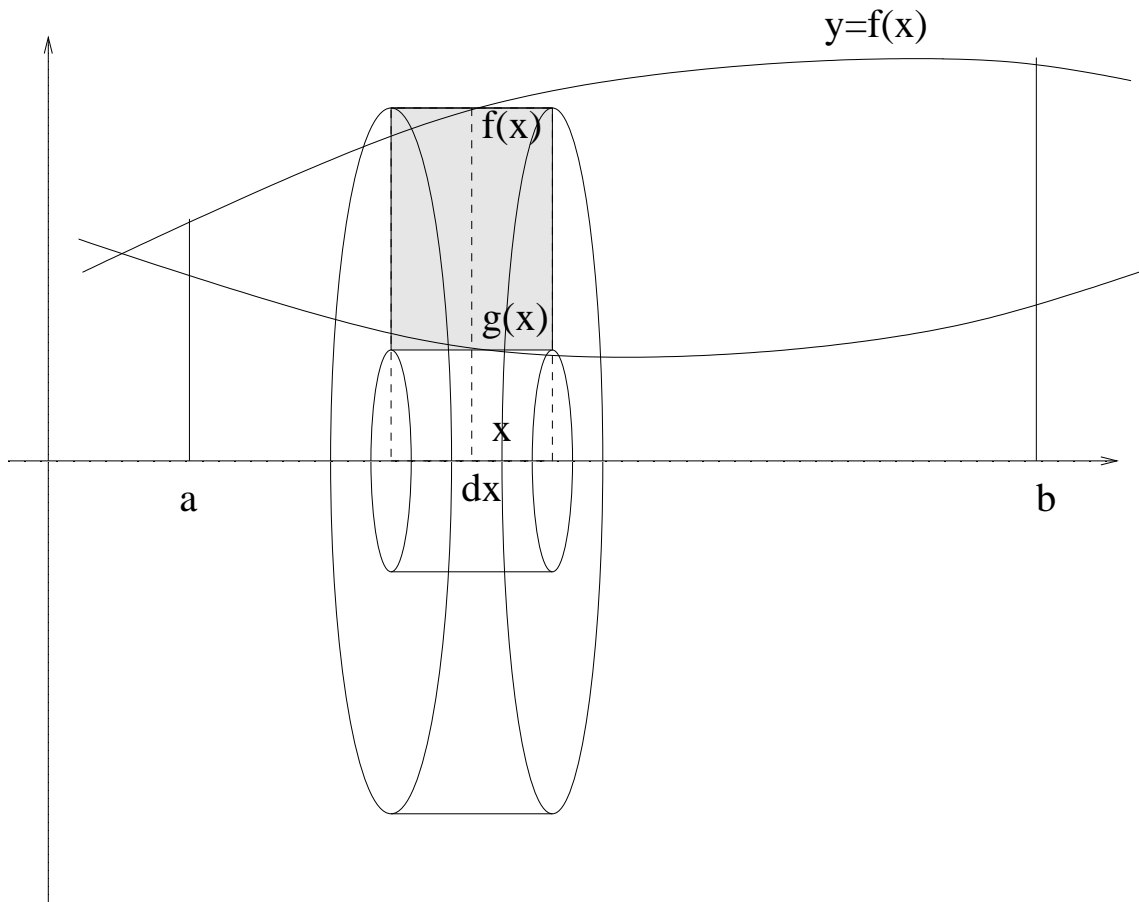
$$V = \pi \int_{-R}^{+R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{+R} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Stel nu dat we een gebied beschouwen dat begrensd wordt door de twee krommen  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$ . Uit Figuur 51 kan dan eenvoudig worden afgeleid dat de elementaire rechthoek in het punt  $x$  bij wenteling rond de  $x$ -as een ringvormig gebied bepaalt, waarvan het volume gegeven wordt door

$$dV = \pi(f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

Het totale volume van het omwentelingslichaam is bijgevolg gegeven door

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$



Figuur 51. *Volume van een omwentelingslichaam.*

**Voorbeeld 8.** Als we het gebied begrensd door de krommen  $y = x^2$  en  $y = \sqrt{x}$  laten wentelen rond de  $x$ -as, bekommen we een omwentelingslichaam waarvan het volume gegeven wordt door

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}.$$

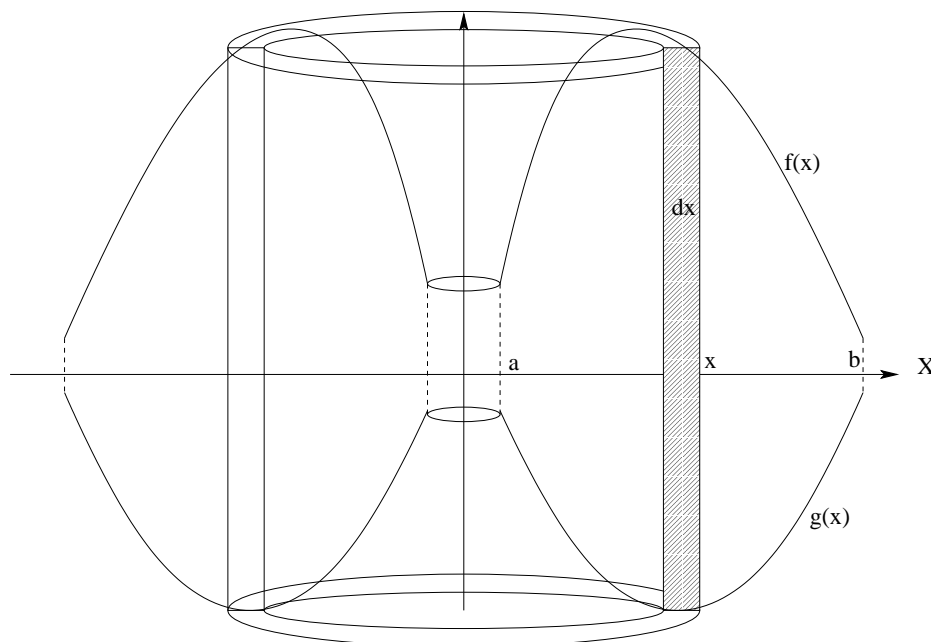
In de bovenstaande gevallen hebben we de figuur opgesplitst in elementaire rechthoeken die loodrecht staan op de omwentelingsas. In sommige gevallen kan het volume makkelijker berekend worden door de vlakke figuur op te splitsen in elementaire rechthoeken die evenwijdig zijn aan de omwentelingsas. Stel dat we twee krommen  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  gegeven krijgen. Om het volume te berekenen van het omwentelingslichaam dat we bekommen door de vlakke figuur (begrensd door deze krommen) te wentelen rond de  $y$ -as, splitsen we het gebied tussen  $x = a$  en  $x = b$  op in elementaire rechthoeken loodrecht op de  $x$ -as. In dit geval vormen de rechthoeken, na wenteling rond de  $y$ -as, een buis met straal  $x$ , dikte  $dx$  en lengte  $f(x) - g(x)$ . Het volume van deze buis wordt gegeven door

$$dV = 2\pi x(f(x) - g(x))dx,$$

en het volume van het omwentelingslichaam wordt bijgevolg gegeven door

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx.$$





Figuur 52. *Volume van een omwentelingslichaam.*

**Voorbeeld 9.** Stel dat we het gebied begrensd door de krommen  $y = x^2$  en  $y = \sqrt{x}$  laten wentelen rond de  $y$ -as, dan bekommen we een omwentelingslichaam met volume

$$\int_0^1 2\pi x(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{3\pi}{10}.$$

#### 4. Lengte van een kromme

Stel nu dat we een vlakke kromme beschouwen, gegeven door de functie  $y = f(x)$  tussen de punten  $x = a$  en  $x = b$ . Om de lengte  $L$  van deze kromme te berekenen splitsen we het interval opnieuw op in  $n$  stukken, en we benaderen de lengte van de kromme door in elk interval de raaklijn te beschouwen aan de kromme in één van de punten. De lengte van deze lijnstukken wordt gegeven door

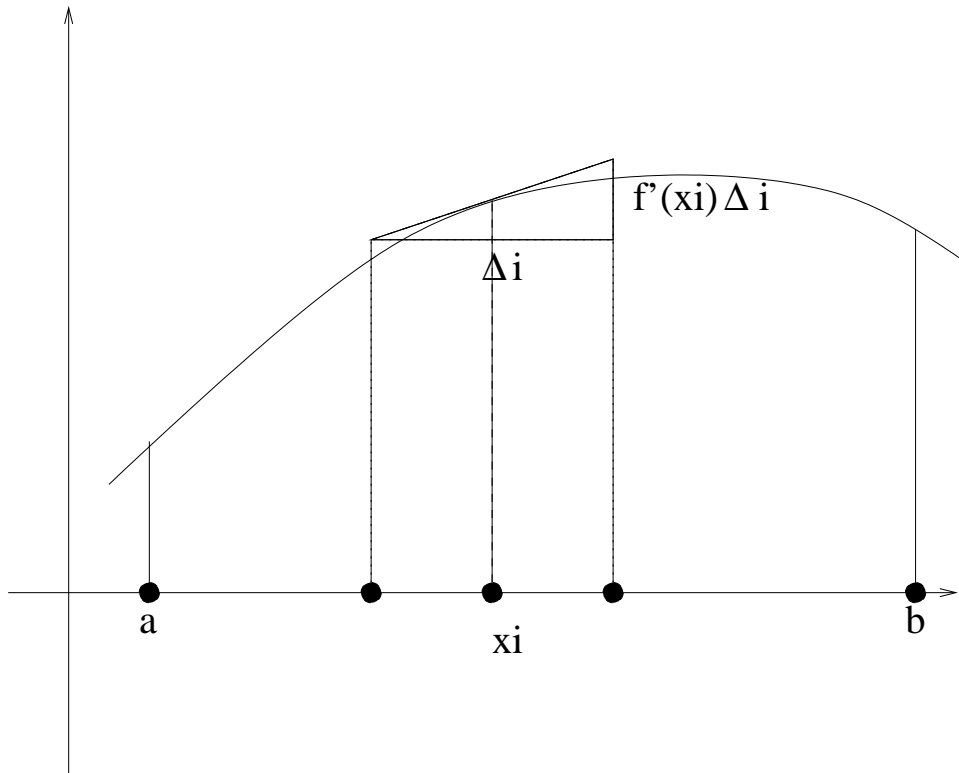
$$\sqrt{\Delta_i^2 + f'(x_i)^2 \Delta_i^2} = \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \Delta_i,$$

en de totale lengte van deze lijnstukken is bijgevolg

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \Delta_i.$$

Als we de limiet beschouwen voor  $n \rightarrow +\infty$  vinden we dat de lengte van de kromme wordt gegeven door

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



Figuur 53. Berekening van de booglengte van een vlakke kromme.

**Voorbeeld 10.** De omtrek van de halve cirkel met straal  $R$  wordt gegeven door de lengte van de kromme  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  tussen  $x = -R$  en  $x = R$ , dit wil zeggen

$$L = \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} dx = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-R}^{+R} = \pi R.$$

We vinden bijgevolg de gekende formule voor de omtrek van de cirkel,  $L = 2\pi R$ .

## 5. Oppervlakte van een omwentelingslichaam

## 6. Zwaartepunt van een vlakke figuur

Het *moment* van een punt met massa  $m$  ten opzichte van een gegeven as wordt gedefinieerd als het product van de massa van dit punt met de afstand van het punt tot de as. Het *zwaartepunt* van een vlakke figuur wordt gedefinieerd als het punt  $(\bar{x}, \bar{y})$  in het vlak waarvoor geldt dat, indien alle massa van de figuur in dit punt wordt geconcentreerd, het moment ten opzichte van een willekeurige as hetzelfde blijft. Het zwaartepunt van een rechthoek komt overeen met het middelpunt van deze rechthoek.

Stel nu dat we een vlakke figuur hebben die begrensd wordt door de  $x$ -as, de verticale rechten  $x = a$  en  $x = b$  en de kromme  $y = f(x)$ . De totale massa  $M$  van dit voorwerp komt dan overeen met de oppervlakte, dit wil zeggen dat

$$M = S = \int_a^b f(x) dx.$$

Als we het zwaartepunt aanduiden met  $(\bar{x}, \bar{y})$  worden de momenten van dit punt ten opzichte van de coördinaat-assen gegeven door

$$M_x = M\bar{y}, \quad M_y = M\bar{x}.$$

Om het moment van de vlakke figuur ten opzichte van de coördinaat-assen te berekenen splitsen we de figuur opnieuw op in elementaire rechthoeken met basis  $dx$  en hoogte  $f(x)$ . Het moment van een dergelijke rechthoek ten opzichte van de  $x$ -as wordt gegeven door

$$dM_x = \frac{f(x)}{2} f(x) dx = \frac{f(x)^2}{2} dx,$$

terwijl het moment ten opzichte van de  $y$ -as gegeven wordt door

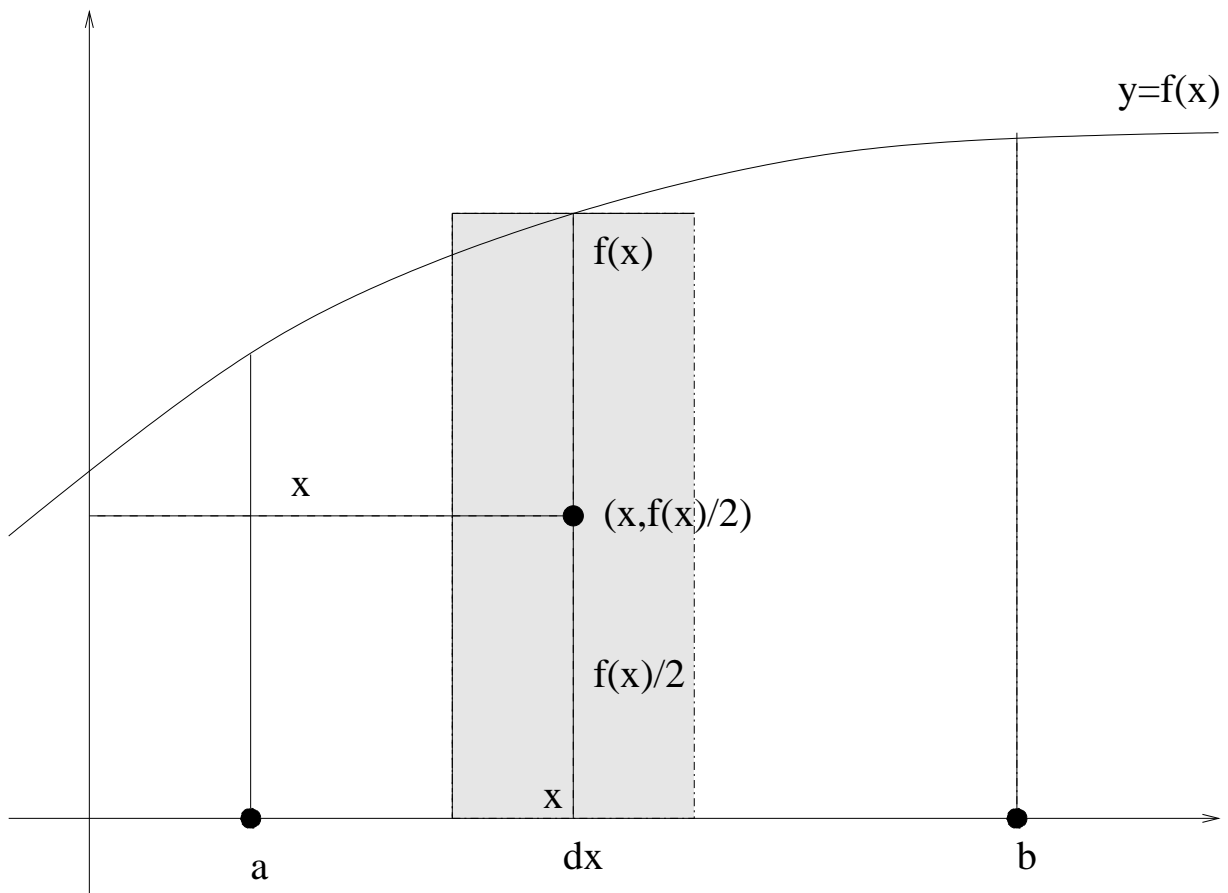
$$dM_y = x f(x) dx.$$

Bijgevolg wordt het totale moment van de figuur gegeven door

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx, \quad M_y = \int_a^b x f(x) dx.$$

We kunnen dan de coördinaten van het zwaartepunt berekenen als volgt:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$



Figuur 54. *Moment van een elementaire rechthoek*

**Voorbeeld 11.** Beschouwen we eerst de rechthoekige driehoek, begrensd door de rechte  $y = \frac{H}{B}x$ , de  $x$ -as en de verticale rechte  $x = B$ . We hebben reeds berekend dat de oppervlakte (en dus de totale massa) van deze driehoek gegeven wordt door

$$M = \frac{1}{2}HB.$$

Het moment van deze driehoek ten opzichte van de  $x$ -as wordt gegeven door

$$M_x = \int_0^B \frac{H}{B} x \frac{H}{2B} x dx = \frac{H^2}{2B^2} \int_0^B x^2 dx = \frac{1}{6}H^2B.$$

Het moment van de driehoek ten opzichte van de  $y$ -as is

$$M_y = \int_0^B x \frac{H}{B} x dx = \frac{HB^2}{3}.$$

Het zwaartepunt van de figuur heeft daarom coördinaten

$$\bar{x} = \frac{HB^2}{3M} = \frac{2}{3}B, \quad \bar{y} = \frac{H^2B}{6M} = \frac{H}{3}.$$

**Voorbeeld 12.** Beschouw het gebied van het eerste kwadrant, begrensd door de parabool  $y = 4 - x^2$ . De oppervlakte van dit gebied wordt gegeven door

$$S = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{16}{3}.$$

Het moment van de figuur ten opzichte van de  $x$ -as wordt gegeven door

$$M_x = \int_0^2 \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2) dx = \frac{128}{15},$$

terwijl het moment ten opzichte van de  $y$ -as bepaald wordt door

$$M_y = \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 4.$$

Bijgevolg zijn de coördinaten van het zwaartepunt gegeven door

$$\bar{x} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{128}{15}}{\frac{16}{3}} = \frac{8}{5}.$$

## 7. Zwaartepunt van een omwentelingslichaam

We beschouwen vervolgens het omwentelingslichaam dat we bekomen door het gebied begrensd door de vlakke kromme  $y = f(x)$ , de  $x$ -as en de verticale rechten  $x = a$  en  $x = b$  te laten wentelen rond de  $x$ -as. Het is duidelijk dat, wegens de symmetrie van de bekomen figuur, het zwaartepunt van dit omwentelingslichaam op de omwentelingsas zal gelegen zijn, dit wil zeggen dat  $\bar{y} = \bar{z} = 0$ . Stel nu dat het zwaartepunt van het omwentelingslichaam overeenkomt met het punt  $(\bar{x}, 0, 0)$ . De totale massa van het omwentelingslichaam wordt gegeven door

$$M = V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

en het moment van de figuur ten opzichte van het  $YZ$ -vlak is bijgevolg gelijk aan

$$M_{yz} = M\bar{x}.$$

Zoals tevoren splitsen we het vlakke gebied op in elementaire rechthoeken met basis  $dx$  en hoogte  $f(x)$ . Bij wenteling rond de  $x$ -as bekomen we dan een cilinder waarvan de massa (het volume) gegeven wordt door

$$dM = \pi f(x)^2 dx.$$

Het zwaartepunt van deze cilinder ligt in het punt  $(x, 0, 0)$ , en het moment van de cilinder ten opzichte van het  $YZ$ -vlak wordt bijgevolg gegeven door  $x dM$ . Het totale moment van de figuur ten opzichte van het  $YZ$ -vlak is dan

$$M_{yz} = \pi \int_a^b x f(x)^2 dx,$$

en we kunnen besluiten dat

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}.$$

**Voorbeeld 13.** We beschouwen opnieuw de kegel met straal  $R$  en hoogte  $H$ , die we bekomen door het driehoekige gebied begrensd door  $y = \frac{R}{H}x$ , de  $x$ -as en de verticale rechte  $x = H$  te laten wentelen rond de  $x$ -as. Het moment van de kegel ten opzichte van het  $YZ$ -vlak wordt gegeven door

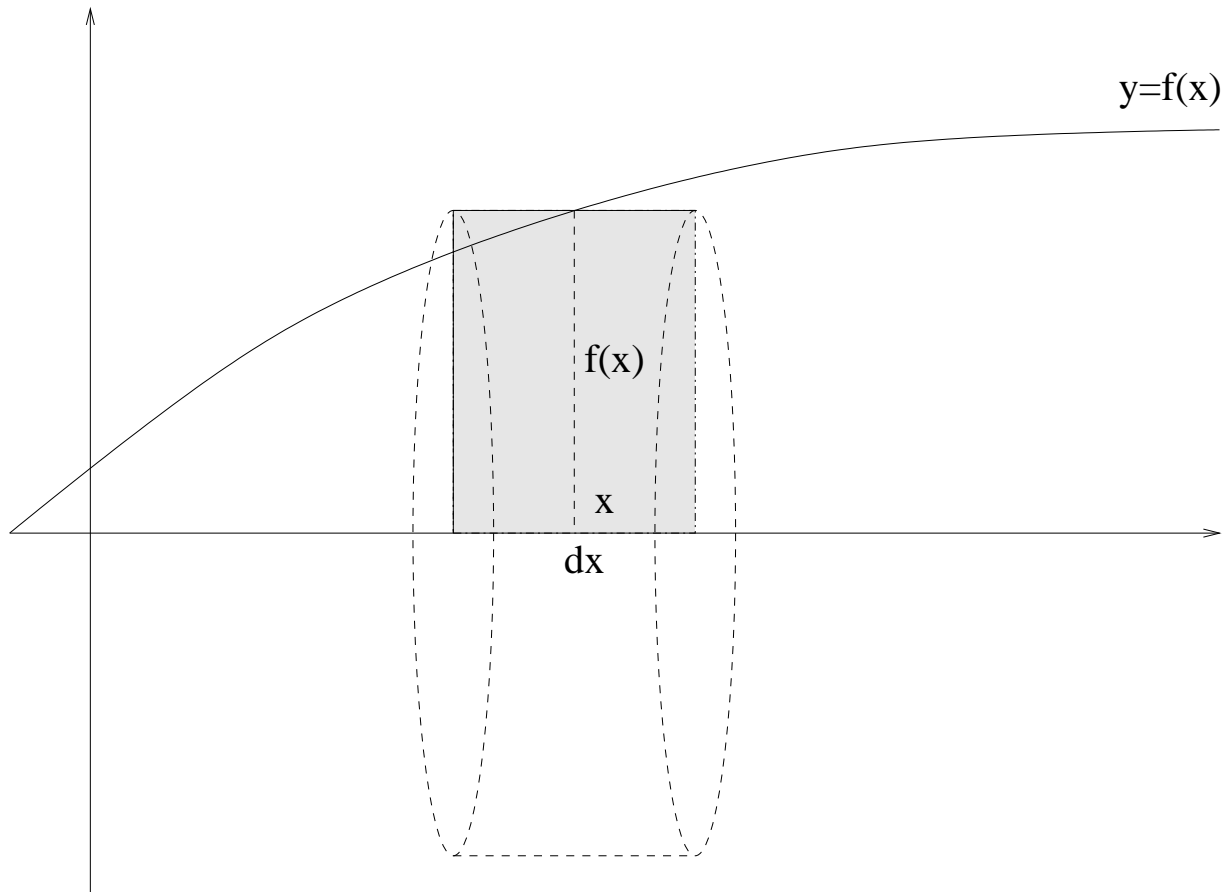
$$M_{yz} = \pi \int_0^H x \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx = \frac{\pi R^2 H^2}{4},$$

en het zwaartepunt ligt bijgevolg in het punt

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{3H}{4}.$$

**Voorbeeld 14.** We beschouwen het gebied in het eerste kwadrant, begrensd door de parabool  $y = 4 - x^2$ , en laten dit gebied wentelen rond de  $x$ -as. Het moment van dit omwentelingslichaam ten opzichte van het  $YZ$ -vlak wordt gegeven door

$$M_{yz} = \pi \int_0^2 x(4 - x^2)^2 dx = \frac{32\pi}{3},$$



Figuur 55. *Moment van een elementaire cilinder.*

terwijl het volume van dit lichaam gelijk is aan

$$V = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{256\pi}{15}.$$

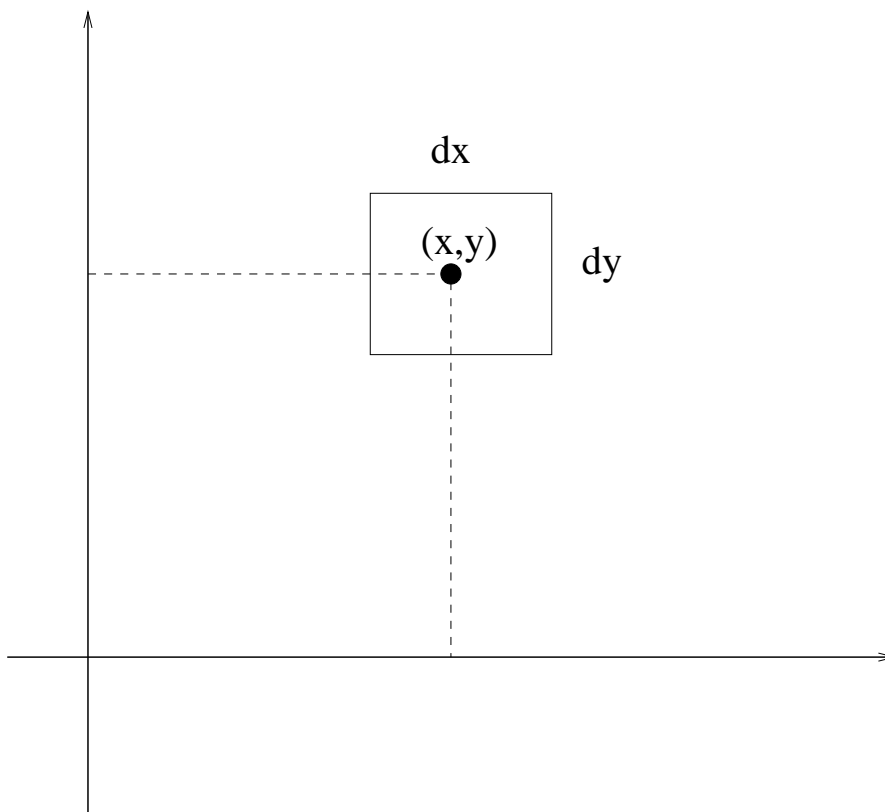
De  $x$ -coördinaat van het zwaartepunt is dan

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{5}{8}.$$

## 8. Traagheidsmoment van een vlakke figuur

Het *traagheidsmoment* van een punt met massa  $m$  ten opzichte van een as wordt gegeven door het product van de massa  $m$  met het kwadraat van de afstand  $r$  van het punt tot de as,  $I = mr^2$ . Indien we een elementaire rechthoek met afmetingen  $dx$  en  $dy$  rond het punt  $(x, y)$  beschouwen wordt het traagheidsmoment gegeven door

$$dI_x = y^2 dx dy, \quad dI_y = x^2 dx dy.$$



Figuur 56. *Traagheidsmoment van een elementaire rechthoek.*

Beschouwen we nu eerst een elementaire rechthoek met hoogte  $dx$  en lengte  $L = x_2 - x_1$  evenwijdig met de  $x$ -as. Als we deze rechthoek verder opdelen in elementaire rechthoeken (zie Figuur 57) met afmetingen  $dx$  en  $dy$  zien we dat het traagheidsmoment ten opzichte van de  $x$ -as gegeven wordt door

$$dI_x = y^2 dx dy,$$

en het traagheidsmoment van de elementaire rechthoek ten opzichte van de  $x$ -as wordt dus gegeven door

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx dy = (x_2 - x_1) y^2 dy = L y^2 dy.$$

Beschouwen we vervolgens een elementaire rechthoek loodrecht op de  $x$ -as. Als we deze rechthoek verder opsplitsen (zie Figuur 58) in elementaire rechthoeken met afmetingen  $dx$  en  $dy$  zien we dat

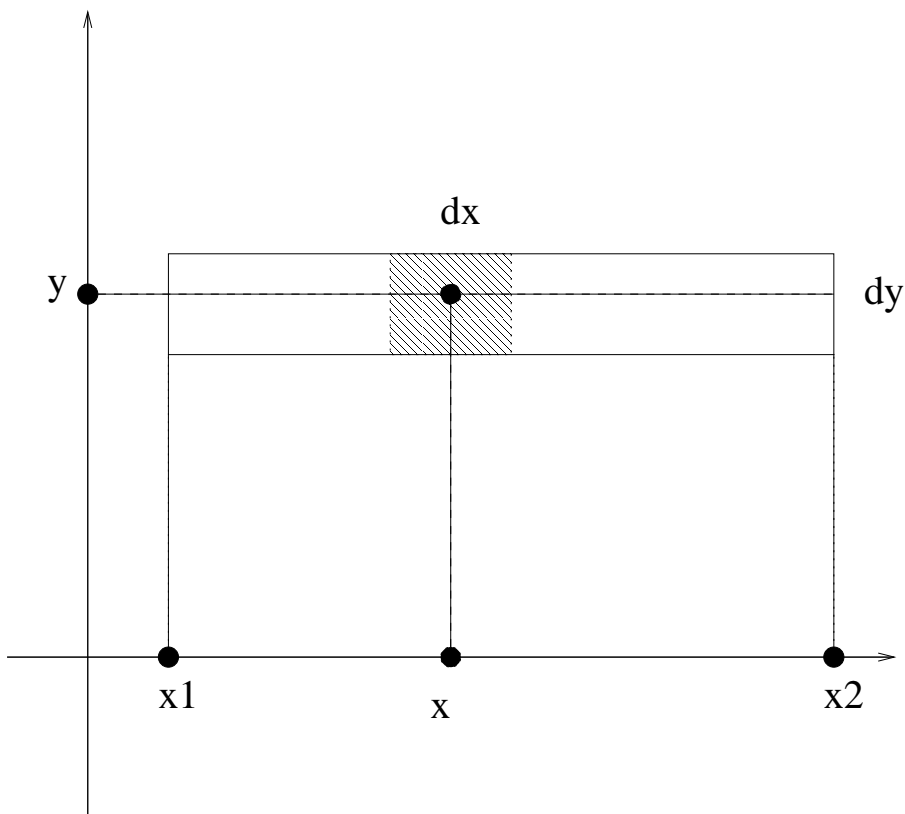
$$dI_x = y^2 dx dy,$$

en bijgevolg is

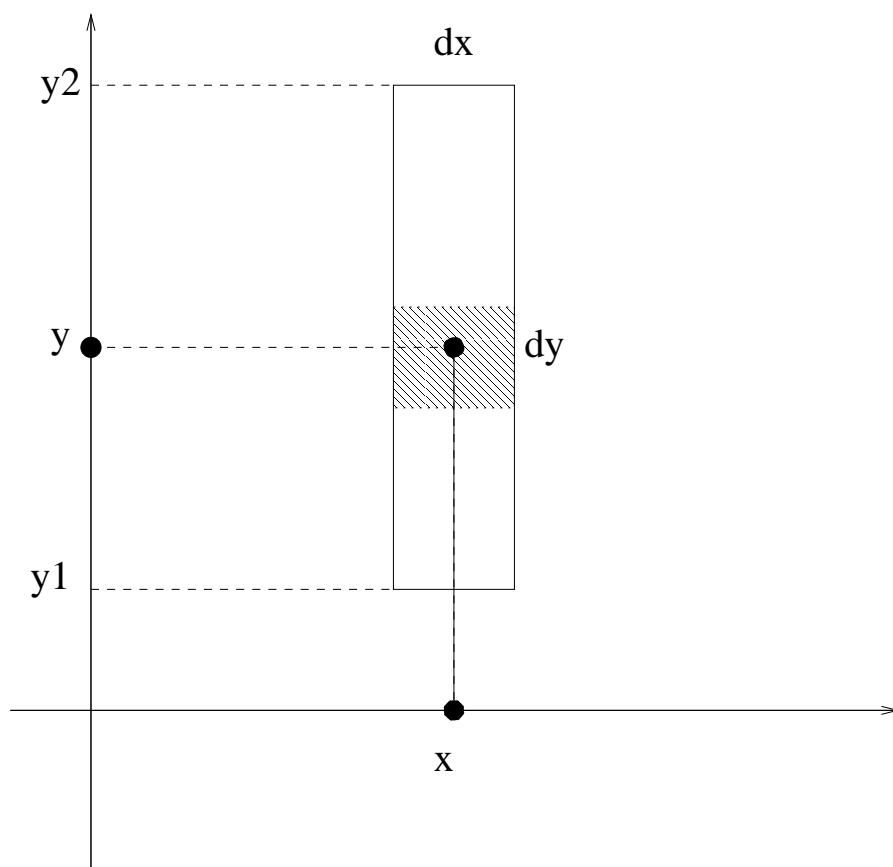
$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dx dy = \frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) dx.$$

In het speciale geval waarin de rechthoek de  $x$ -as als een zijde heeft (en hoogte  $H$  heeft) levert dit ons

$$I_x = \frac{H^3}{3} dx.$$



Figuur 57. *Traagheidsmoment van een elementaire rechthoek.*



Figuur 58. *Traagheidsmoment van een elementaire rechthoek.*



Om het traagheidsmoment van een vlakke figuur ten opzichte van een as te berekenen kunnen we de figuur opdelen in elementaire rechthoeken die ofwel evenwijdig zijn met de as ofwel loodrecht op deze as staan. Het traagheidsmoment van de figuur wordt gegeven door de som van al de traagheidsmomenten van deze elementaire rechthoeken.

**Voorbeeld 15.** We beschouwen de rechthoek begrensd door de rechte  $y = H$ , de  $x$ -as en de verticale rechten  $x = 0$  en  $x = B$ , en berekenen het traagheidsmoment van deze vlakke figuur ten opzichte van de  $x$ -as. Als we de figuur opsplitsen in elementaire rechthoeken evenwijdig met de  $x$ -as (dus met breedte  $B$  en hoogte  $dy$ ) vinden we dat het traagheidsmoment van elke rechthoek gegeven wordt door

$$dI_x = y^2 B dy,$$

en het totale traagheidsmoment van de rechthoek is bijgevolg

$$I_x = \int_0^H B y^2 dy = \frac{1}{3} B H^3.$$

Als we anderzijds de figuur opsplitsen in elementaire rechthoeken loodrecht op de  $x$ -as (met hoogte  $H$  en breedte  $dx$ ) vinden we als traagheidsmoment van de elementaire rechthoek

$$dI_x = \frac{H^3}{3} dx,$$

en het totale traagheidsmoment wordt dan opnieuw

$$I_x = \int_0^B \frac{H^3}{3} dx = \frac{1}{3} H^3 B.$$

**Voorbeeld 16.** We beschouwen het gebied begrensd door de parabool  $y = 4 - x^2$  en de  $x$ -as, en berekenen eerst het traagheidsmoment van de figuur ten opzichte van de  $x$ -as. Daarvoor splitsen we de figuur op in elementaire rechthoeken loodrecht op de  $x$ -as (met breedte  $dx$  en hoogte  $4 - x^2$ ). Het traagheidsmoment van elke rechthoek is dan gegeven door

$$dI_x = \frac{1}{3} (4 - x^2)^3 dx,$$

en het totale traagheidsmoment wordt dus

$$I_x = \int_{-2}^2 dI_x = \frac{4096}{15}.$$

Om het traagheidsmoment van de figuur ten opzichte van de  $y$ -as te berekenen gebruiken we dezelfde opdeling in elementaire rechthoeken. Deze rechthoeken zijn nu evenwijdig met de as, en het traagheidsmoment wordt bijgevolg gegeven door

$$dI_y = x^2 (4 - x^2) dx.$$

Het totale traagheidsmoment is bijgevolg

$$I_y = \int_{-2}^2 dI_y = \frac{128}{15}.$$

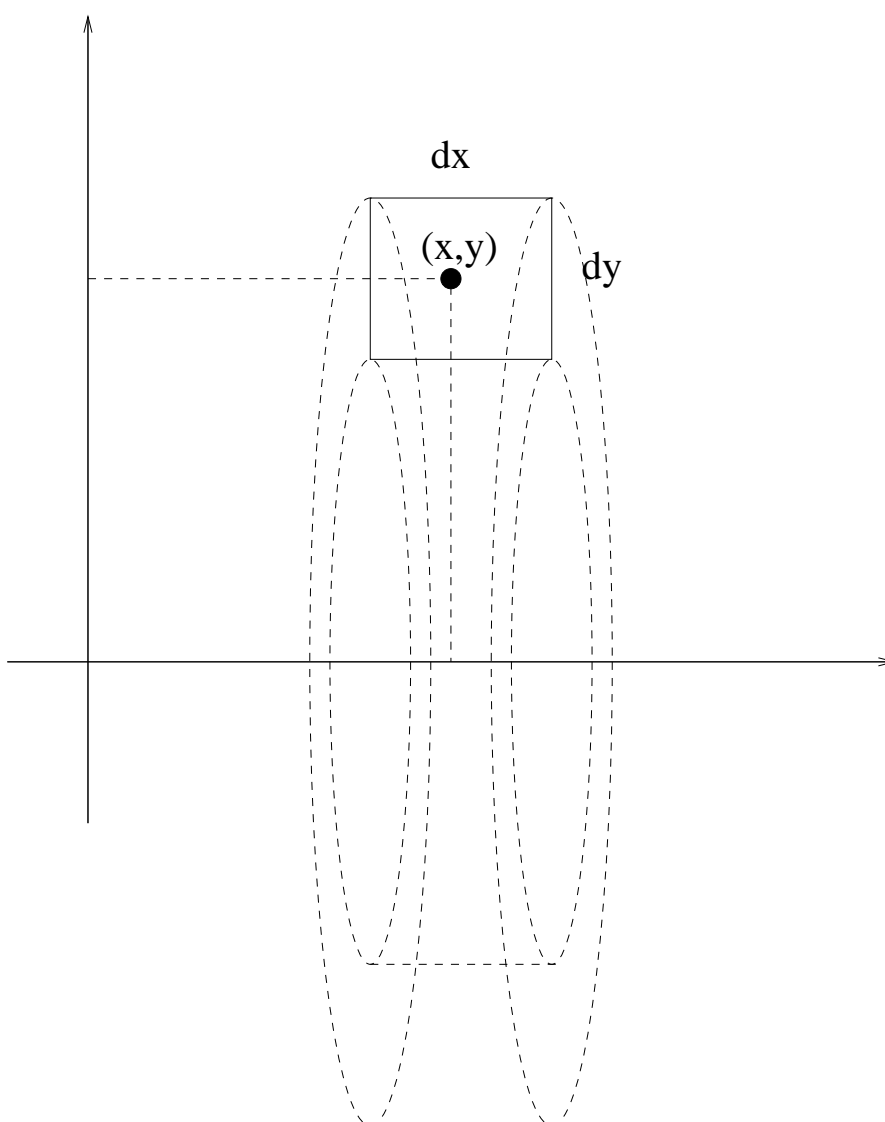
## 9. Traagheidsmoment van een omwentelingslichaam

Tenslotte zullen we het traagheidsmoment van een omwentelingslichaam ten opzichte van zijn omwentelingsas berekenen. We beschouwen daarom eerst een elementaire rechthoek met afmetingen  $dx$  en  $dy$  rond een punt  $(x, y)$ . Als we deze rechthoek wentelen rond de  $x$ -as (Figuur 59) bekomen we een ring. De totale massa van deze ring wordt gegeven door

$$dM = 2\pi y dx dy,$$

en het traagheidsmoment van de ring ten opzichte van de  $x$ -as is bijgevolg gelijk aan

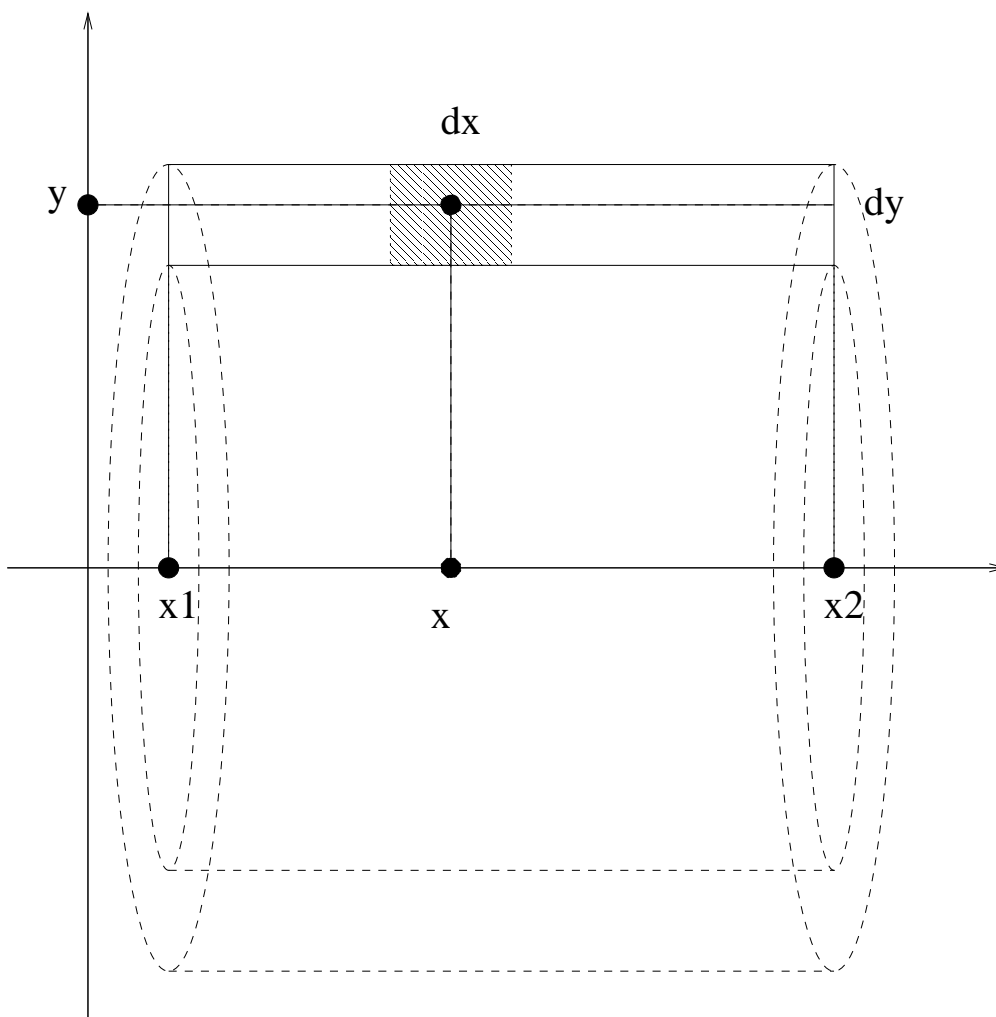
$$dI_x = 2\pi y^3 dx dy.$$



Figuur 59. *Traagheidsmoment van een elementaire ring.*

Beschouwen we nu een elementaire rechthoek evenwijdig met de omwentelingsas. Bij wentelen rond de  $x$ -as bekomen we een buis met straal  $y$ , dikte  $dy$  en lengte  $L$ . (Zie Figuur 60.) Opsplitsen in elementaire rechthoeken toont dat het traagheidsmoment van deze buis gegeven wordt door

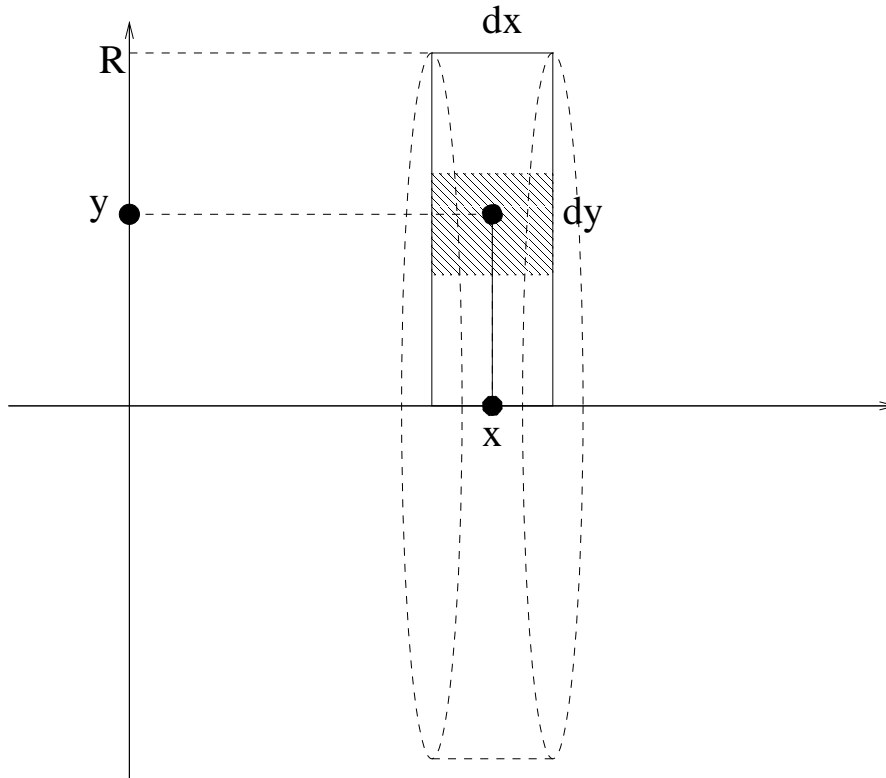
$$dI_x = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y^3 dx dy = 2\pi L y^3 dy.$$



Figuur 60. *Traagheidsmoment van een elementaire buis.*

Vervolgens beschouwen we een elementaire rechthoek loodrecht op de  $x$ -as, met hoogte  $R$  en breedte  $dx$ . Bij wentelen rond de  $x$ -as brengt deze rechthoek een elementaire cilinder voort met straal  $R$  en hoogte  $dx$ . Opsplitsen in elementaire rechthoeken (Figuur 61) toont dan dat het traagheidsmoment van deze cilinder gegeven wordt door

$$dI_x = \int_0^R 2\pi y^3 dx dy = 2\pi \frac{R^4}{4} dx = \frac{\pi R^4}{2} dx.$$



Figuur 61. *Traagheidsmoment van een elementaire cilinder.*

Om het traagheidsmoment van een willekeurig omwentelingslichaam ten opzichte van de omwentelingsas te berekenen zullen we de figuur opdelen in elementaire rechthoeken die ofwel evenwijdig zijn met de as ofwel loodrecht op deze as staan. Het traagheidsmoment van het lichaam wordt dan bepaald door de som van de traagheidsmomenten van de buizen of cilinders die op deze manier worden bekomen.

**Voorbeeld 17.** Als we de rechthoek met hoogte  $R$  en breedte  $H$  laten wentelen rond de  $x$ -as bekomen we een cilinder met straal  $R$  en hoogte  $H$ . Om het traagheidsmoment van deze cilinder ten opzichte van de  $x$ -as te berekenen splitsen we de rechthoek eerst op in elementaire rechthoeken evenwijdig met de  $x$ -as (hoogte  $dy$ , breedte  $H$  en op een afstand  $y$  van de omwentelingsas). Als we deze elementaire rechthoeken laten wentelen bekomen we elementaire buizen waarvan het traagheidsmoment gegeven wordt door

$$dI_x = 2\pi y^3 H dy,$$

en het traagheidsmoment van de cilinder is bijgevolg

$$I_x = 2\pi H \int_0^R y^3 dy = \frac{\pi H R^4}{2}.$$

We kunnen de rechthoek ook opsplitsen in elementaire rechthoeken loodrecht op de  $x$ -as (met breedte  $dx$  en hoogte  $R$ ). Als we deze rechthoeken laten wentelen bekomen we elementaire cilinders, waarvan het traagheidsmoment gegeven wordt door

$$dI_x = \frac{\pi R^4}{2} dx,$$

en het traagheidsmoment van de ganse cilinder wordt bijgevolg

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} \int_0^H dx = \frac{\pi R^4 H}{2}.$$

**Voorbeeld 18.** We beschouwen het vlakke gebied begrensd door de parabool  $y = 4x - x^2$  en de  $x$ -as, en we laten dit gebied wentelen rond de  $x$ -as. Om het traagheidsmoment van dit omwentelingslichaam ten opzichte van de  $x$ -as te berekenen splitsen we de vlakke figuur op in elementaire rechthoeken loodrecht op de  $x$ -as (breedte  $dx$  en hoogte  $4x - x^2$ ). Bij wenteling rond de  $x$ -as ontstaat een elementaire cilinder waarvan het traagheidsmoment gegeven is door

$$dI_x = \frac{\pi(4x - x^2)^4}{2} dx.$$

Het traagheidsmoment van de figuur wordt bijgevolg gegeven door

$$I_x = \int_0^4 \frac{\pi(4x - x^2)^4}{2} dx = \frac{65536\pi}{315}.$$

**Voorbeeld 19.** We beschouwen opnieuw het vlakke gebied uit het vorige voorbeeld maar laten het gebied ditmaal wentelen rond de  $y$ -as. Om het traagheidsmoment van het omwentelingslichaam ten opzichte van de  $y$ -as te berekenen gebruiken we dezelfde elementaire rechthoeken. Deze elementaire rechthoeken zijn evenwijdig met de  $y$ -as (breedte  $dx$ , hoogte  $4x - x^2$  en gelegen op een afstand  $x$  van de  $y$ -as), en bij wenteling rond de  $y$ -as vormen ze een elementaire buis waarvan het traagheidsmoment gegeven wordt door

$$dI_y = x^2 2\pi x(4x - x^2) dx.$$

Het totale traagheidsmoment wordt dan gegeven door

$$I_y = 2\pi \int_0^4 x^3(4x - x^2) dx = \frac{4096\pi}{15}.$$



# HOOFDSTUK 12

## MEERVOUDIGE INTEGRALen

### 1. Definitie

Beschouwen we een functie  $z = f(x, y)$  van twee veranderlijken die we overal positief veronderstellen in het rechthoekig gebied  $R$  in het  $xy$ -vlak, bepaald door

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

We kiezen vervolgens twee natuurlijke getallen  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , en delen het interval  $[a, b]$  (resp.  $[c, d]$ ) in  $n$  (resp.  $m$ ) deelintervallen door de keuze van punten

$$a = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = b, \quad c = \psi_0 < \psi_1 < \dots < \psi_{m-1} < \psi_m = d.$$

We zien dat het rechthoekig gebied  $R$  hierdoor opgedeeld wordt in  $n \cdot m$  kleinere rechthoeken  $R_{kl}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, m$ , bepaald door

$$\varphi_{k-1} \leq x \leq \varphi_k, \quad \psi_{l-1} \leq y \leq \psi_l.$$

Duiden we de lengte van elk interval aan als

$$\Delta_k x = \varphi_k - \varphi_{k-1}, \quad \Delta_l y = \psi_l - \psi_{l-1},$$

dan wordt de oppervlakte van  $R_{kl}$  gegeven door

$$\Delta_{kl} S = \Delta_k x \cdot \Delta_l y.$$

Tenslotte kiezen we in elke rechthoek  $R_{kl}$  een willekeurig punt  $P_{kl}$  met coördinaten

$$\varphi_{k-1} \leq x_{kl} \leq \varphi_k, \quad \psi_{l-1} \leq y_{kl} \leq \psi_l.$$

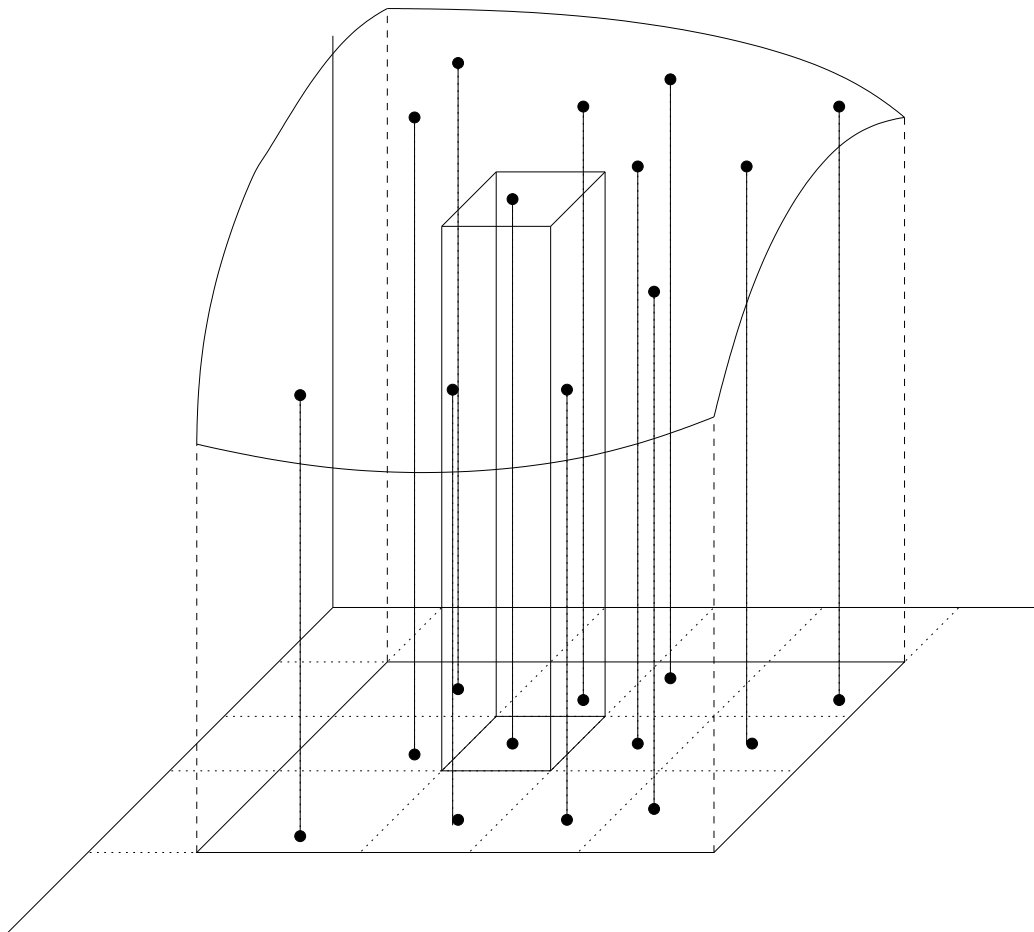
Het volume van het lichaam, begrensd door het vlak  $z = 0$ , de verticale vlakken door de zijden van de rechthoek  $R_{kl}$  en het oppervlak  $z = f(x, y)$  kan dan bij benadering berekend worden als het volume van de balk met dezelfde basis  $R_{kl}$ , waarvan de hoogte overeenkomt met de waarde  $z = f(x_{kl}, y_{kl})$ . De som

$$S_{nm} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(P_{kl}) \Delta_{kl} S = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(x_{kl}, y_{kl}) \Delta_k x \Delta_l y$$

van de volumes van deze balken levert bijgevolg een benaderde waarde voor het volume van het lichaam begrensd door het vlak  $z = 0$ , de verticale vlakken door de zijden van de rechthoek  $R$  en het oppervlak  $z = f(x, y)$ . Door het aantal rechthoekjes  $R_{kl}$  te laten toenemen, bekomen we een steeds preciezer benadering van dit volume. Men kan aantonen dat, wanneer  $n$  en  $m$  oneindig groot worden, en we er daarbij voor zorgen dat de oppervlakte van elke rechthoek  $R_{kl}$  naar 0 streeft, de limiet

$$S = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} S_{nm}$$

onafhankelijk is van de gekozen verdelingen en punten. We vinden in dat geval de exacte waarde voor het volume van het beschouwde lichaam.



Figuur 62. *Dubbelintegraal van een functie over een rechthoekig domein*



We kunnen dezelfde constructie ook uitvoeren voor een functie  $z = f(x, y)$  die niet noodzakelijk overal positief is. De limiet

$$S = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} S_{nm}$$

noemen we de integraal van de functie  $f(x, y)$  over het rechthoekig gebied  $R$ , en we duiden deze dubbelintegraal aan als

$$S = \int \int_R f(x, y) dS.$$

## 2. Berekening van dubbelintegralen over een rechthoekig gebied

Voor de praktische berekening van de dubbelintegraal

$$\int \int_R f(x, y) dS$$

van de functie  $z = f(x, y)$  over het rechthoekig gebied  $R$  maken we, voor de gekozen waarden  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , een opdeling van de intervallen  $[a, b]$  (resp.  $[c, d]$ ) in  $n$  (resp.  $m$ ) deelintervallen door de keuze van de waarden

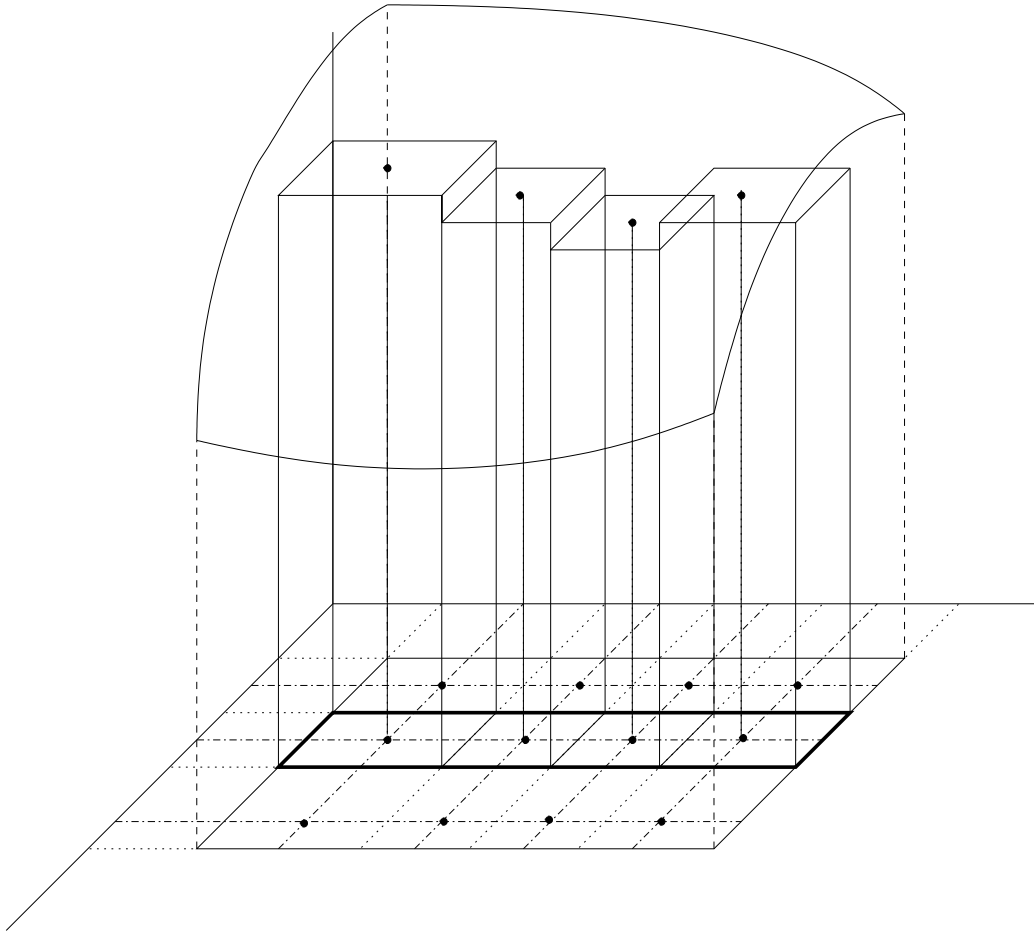
$$a = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = b, \quad c = \psi_0 < \psi_1 < \dots < \psi_{m-1} < \psi_m = d.$$

We kiezen dan, in elk deelinterval  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$  (resp.  $[\psi_{l-1}, \psi_l]$ ) een punt  $x_k$  (resp.  $y_l$ ). In elke rechthoek  $R_{kl}$  kiezen we vervolgens het punt  $P_{kl}$  met coördinaten  $(x_k, y_l)$ . De som  $S_{nm}$  wordt dan gegeven door

$$S_{nm} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(x_k, y_l) \Delta_k x \Delta_l y,$$

en de integraal van de functie  $f$  over het rechthoekige domein  $R$  is dan gelijk aan

$$\int \int_R f(x, y) dS = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} S_{nm} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} S_{nm} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_{nm} \right).$$



Figuur 63. Berekening van een dubbelintegraal over een rechthoekig gebied

Om deze limiet te berekenen, kiezen we eerst een vaste waarde  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  en beschouwen we de som van de volumes van de balken die overeenkomen met de gekozen waarde van  $k$ ,

$$S_m(k) = \sum_{l=1}^m f(x_k, y_l) \Delta_k x \Delta_l y = \Delta_k x \sum_{l=1}^m f(x_k, y_l) \Delta_l y.$$

Wanneer we de limiet van deze som berekenen, waarbij we het aantal deelintervallen  $m$  oneindig groot laten worden, en er voor zorgen dat voor elk deelinterval de lengte  $\Delta_l y$  naar nul streeft, vinden we dat

$$S(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(k) = \Delta_k x \int_c^d f(x_k, y) dy.$$

Bijgevolg is

$$S_n = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{nm} = \sum_{k=1}^n S(k) = \sum_{k=1}^n \Delta_k x \int_c^d f(x_k, y) dy.$$

Laten we vervolgens het aantal deelintervallen  $n$  oneindig groot worden, en zorgen we er daarbij voor dat de lengte van alle deelintervallen naar 0 streeft, zien we dat

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

en we besluiten dat de dubbelintegraal iteratief kan berekend worden als

$$\int \int_R f(x, y) dS = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Wanneer we eerst de som berekenen voor een vaste waarde  $y_l$ , levert dezelfde redenering ons dat

$$\int \int_R f(x, y) dS = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Intuïtief kunnen we stellen dat, voor een vaste waarde  $x_0 \in [a, b]$ , de bepaalde integraal

$$\int_c^d f(x_0, y) dy = S(x_0)$$

ons de oppervlakte geeft van de doorsnede van het beschouwde lichaam met het verticaal vlak  $x = x_0$ . We kunnen het lichaam nu opsplitsen in elementaire schijfjes met een infinitesimale dikte  $dx$ , die overeenkomen met de doorsneden langs het verticale vlak  $x = x_0$ , en dit voor alle waarden  $x_0 \in [a, b]$ . Het (infinitesimale) volume van een dergelijke elementaire schijf wordt gegeven door

$$V(x_0) = S(x_0) dx,$$

en het totale volume van het lichaam is dan de “som”

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Op dezelfde wijze kunnen we stellen dat

$$S(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

de oppervlakte geeft van de doorsnede van het lichaam met het verticale vlak  $y = y_0$ . Als we het lichaam opdelen in elementaire schijfjes met een infinitesimale dikte  $dy$ , gevormd door deze doorsneden, zien we dat het volume van het lichaam gegeven wordt door de som

$$\int_c^d S(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

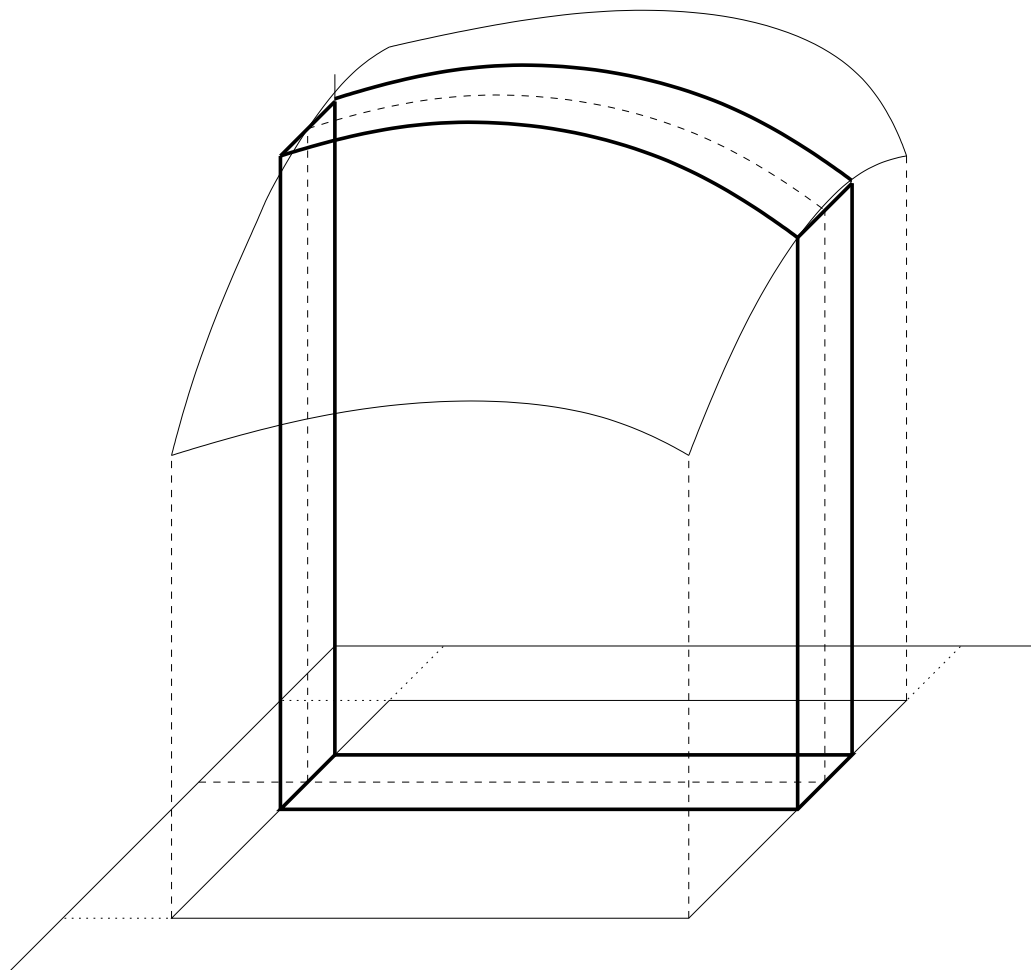
**Voorbeeld 1.** Berekenen we de integraal

$$\int \int_R \frac{y}{3} dS$$

van de functie  $z = \frac{y}{3}$  over het rechthoekige domein bepaald door  $x \in [0, 2]$  en  $y \in [0, 3]$ .

Voor een vaste waarde van  $x_0 \in [0, 2]$  wordt de doorsnede van het lichaam met het verticale vlak  $x = x_0$  bepaald door

$$z = \frac{y}{3}, \quad y \in [0, 3]$$



Figuur 64. *Berekening van de dubbelintegraal over een rechthoekig gebied*

en de oppervlakte van deze doorsnede is

$$S(x_0) = \int_0^3 \frac{y}{3} dy = \frac{1}{6} y^2 \Big|_0^3 = \frac{3}{2}.$$

Het volume van de elementaire schijf met dikte  $dx$  die we hier afsnijden wordt gegeven door

$$V(x_0) = \frac{3}{2} dx,$$

en het volume van het lichaam is bijgevolg gelijk aan

$$\int_0^2 \frac{3}{2} dx = 3.$$

Voor een vaste waarde  $y_0 \in [0, 3]$  wordt de doorsnede bepaald door

$$z = \frac{y_0}{3}, \quad x \in [0, 2],$$

en de oppervlakte van deze figuur is dan

$$S(y_0) = \int_0^2 \frac{y_0}{3} dx = \frac{2y_0}{3}.$$

Het volume van de infinitesimale schijf komt overeen met

$$V(y_0) = \frac{2y_0}{3} dy,$$

en het volume van het ganse lichaam is bijgevolg

$$V = \int_0^3 \frac{2y}{3} dy = \frac{y^2}{3} \Big|_0^3 = 3.$$

**Voorbeeld 2.** Het volume van het lichaam, begrensd door de omwentelingsparaboloïde  $z = x^2 + y^2$ , het vlak  $z = 0$  en de verticale vlakken  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  en  $y = 1$ , wordt bepaald door de dubbelintegraal

$$\int \int_R x^2 + y^2 dS,$$

over het rechthoekige domein  $R$  bepaald door

$$x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1].$$

Deze waarde van deze integraal wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \int \int_R x^2 + y^2 dS &= \int_0^1 \left( \int_0^1 x^2 + y^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

We kunnen deze dubbelintegraal ook uitrekenen als

$$\begin{aligned} \int \int_R x^2 + y^2 dS &= \int_0^1 \left( \int_0^1 x^2 + y^2 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y^2 \right) dy \\ &= \frac{1}{3} y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

### 3. Dubbelintegraal over een willekeurig domein

Beschouwen we vervolgens een willekeurig domein  $S$ , en veronderstellen we dat de functie  $z = f(x, y)$  positieve waarden aanneemt voor alle punten  $(x, y)$  in  $S$ . Om het volume van het lichaam te berekenen, dat begrensd wordt door het oppervlak  $z = f(x, y)$ , het grondvlak  $z = 0$  en de cilinder over de rand van het domein  $S$ , zullen we het lichaam opnieuw opdelen in elementaire schijfjes die evenwijdig zijn met één van de coördinaatsassen.

We veronderstellen daarom dat een rechte evenwijdig met de  $y$ -as (resp. de  $x$ -as) de rand van het domein  $S$  snijdt in ten hoogste twee punten. De randen van het domein  $S$  worden dan volledig beschreven door twee functies

$$\begin{aligned} y_1 = \sigma_1(x), \quad y_2 = \sigma_2(x), \quad x \in [a, b], \\ \text{resp.} \\ x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad y \in [c, d]. \end{aligned}$$

Voor elk punt  $x_0 \in [a, b]$  wordt de oppervlakte van de elementaire schijf evenwijdig met de  $y$ -as bepaald door

$$S(x_0) = \int_{\sigma_1(x_0)}^{\sigma_2(x_0)} f(x_0, y) dy,$$

en het volume van deze schijf (met infinitesimale dikte  $dx$ ) is bijgevolg

$$V(x_0) = \left( \int_{\sigma_1(x_0)}^{\sigma_2(x_0)} f(x_0, y) dy \right) dx.$$

Door de volumes van deze schijfjes op samen te tellen vinden we dat

$$\int \int_S f(x, y) dS = \int_a^b \left( \int_{\sigma_1(x)}^{\sigma_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Door het volume op dezelfde manier op te splitsen in elementaire schijfjes evenwijdig met de  $x$ -as, bekomen we

$$\int \int_S f(x, y) dS = \int_c^d \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

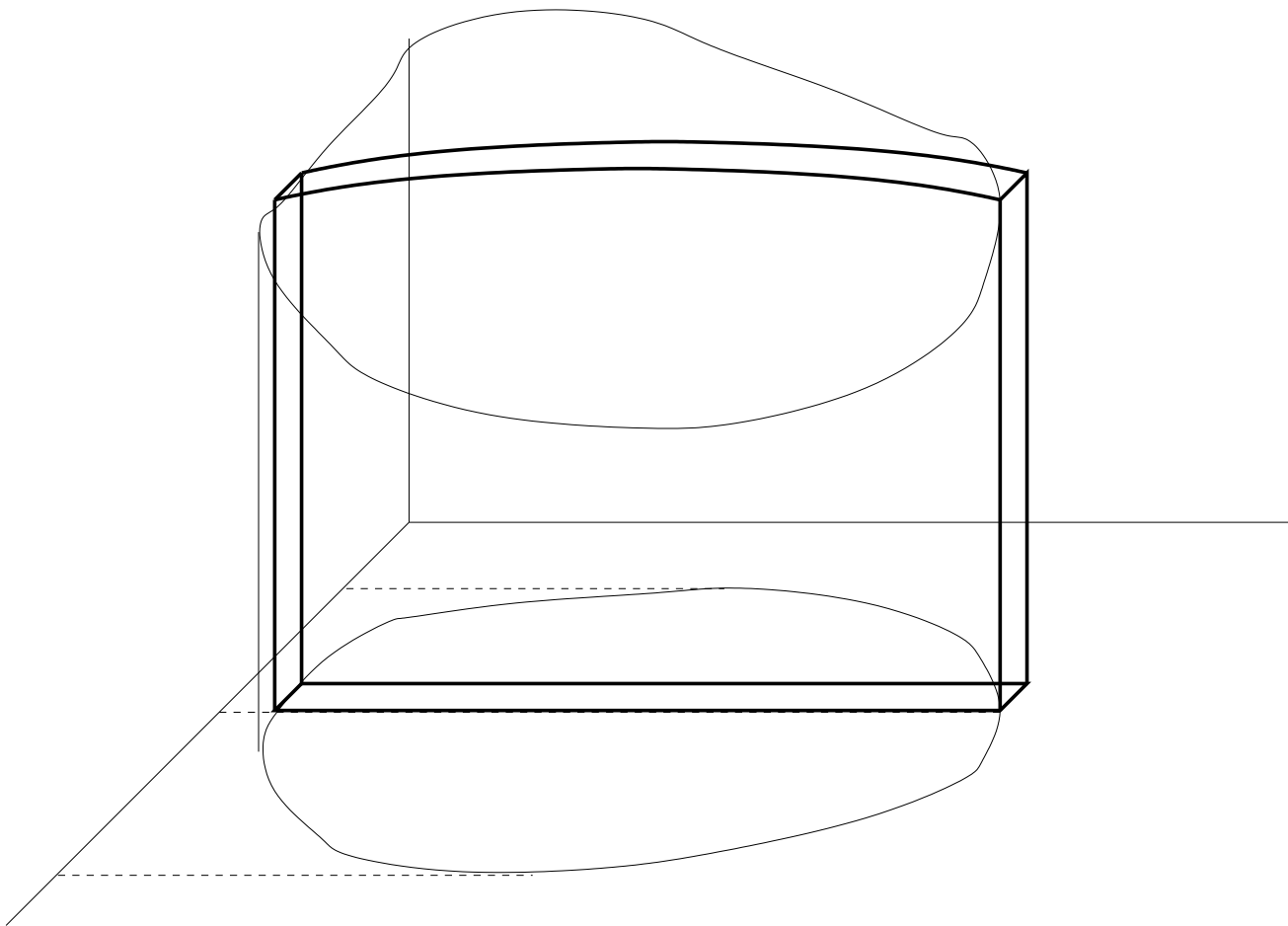
**Voorbeeld 3.** Berekenen we de dubbelintegraal

$$\int \int_S dS$$

van de constante functie  $z = 1$  over het driehoekige gebied  $S$ , gevormd door de  $x$ -as, de  $y$ -as en de rechte  $3x + 2y = 6$  door de punten  $(2, 0)$  en  $(0, 3)$ .

Het is duidelijk dat  $x$  in dit geval varieert tussen  $x = 0$  en  $x = 2$  en dat, voor elke waarde  $x_0 \in [0, 2]$ ,  $y$  varieert tussen  $y = 0$  en  $y = \frac{1}{2}(6 - 3x_0)$ . Bijgevolg kunnen we de dubbelintegraal berekenen als

$$\int_{x=0}^2 \left( \int_{y=0}^{3-\frac{3}{2}x} dy \right) dx = \int_0^2 \left( 3 - \frac{3}{2}x \right) dx = \left( 3x - \frac{3}{4}x^2 \right) \Big|_0^2 = 3.$$



Figuur 65. Berekening van de dubbelintegraal over een willekeurig domein  $S$

**Voorbeeld 4.** Het volume van de pyramide gevormd door de drie coördinaatsassen en het vlak door de punten  $(5, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$  en  $(0, 0, 4)$  (met vergelijking  $12x + 20y + 15z = 60$ ) wordt gegeven door de dubbelintegraal

$$\int \int_S \frac{1}{15}(60 - 12x - 20y) dS$$

over het driehoekige gebied gevormd door de  $x$ -as, de  $y$ -as en de rechte  $3x + 5y = 15$  die de punten  $(5, 0)$  en  $(0, 3)$  verbindt.

Het is duidelijk dat  $x$  varieert tussen 0 en 5, en dat voor een willekeurige  $x$  de waarden van  $y$  variëren tussen 0 en  $\frac{1}{5}(15 - 3x)$ . Bijgevolg is de dubbelintegraal gegeven door

$$\int_0^5 \left( \int_0^{3-\frac{3}{5}x} 4 - \frac{4}{5}x - \frac{4}{3}y dy \right) dx = \int_0^5 6 + \frac{18}{75}x^2 - \frac{36}{15}x dx = 10.$$

**Voorbeeld 5.** Het volume van een halve bol met straal  $R$  wordt gegeven door de dubbelintegraal

$$\int \int_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dS$$

over de schijf  $S$  met straal  $R$  in het  $xy$ -vlak. Het is duidelijk dat  $x$  in dit geval varieert tussen  $-R$  en  $+R$ , en dat voor een gegeven waarde van  $x$  de waarden van  $y$  variëren tussen  $-\sqrt{R^2 - x^2}$  en  $+\sqrt{R^2 - x^2}$ . Bijgevolg kunnen we de integraal berekenen als

$$\int_{-R}^{+R} \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx = \int_{-R}^{+R} \frac{\pi}{2} (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2} \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{+R} = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Het volume van de bol met straal  $R$  wordt bijgevolg gegeven door  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

**Voorbeeld 6.** De dubbelintegraal van de functie

$$\iint_S 10 - x - y dS$$

over het cirkelvormige gebied  $S$  met straal 4 (vergelijking  $x^2 + y^2 = 16$ ) bepaalt het volume van de cilinder met straal 4 rond de  $z$ -as, die afgeknot wordt door het vlak met vergelijking  $x + y + z = 10$ .

Het is duidelijk dat  $x$  varieert tussen  $-4$  en  $+4$ , en dat voor een gegeven waarde van  $x$  de waarden van  $y$  variëren tussen  $-\sqrt{16 - x^2}$  en  $+\sqrt{16 - x^2}$ . Het volume van het beschouwde lichaam is bijgevolg gelijk aan

$$\int_{-4}^{+4} \left( \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{+\sqrt{16-x^2}} 10 - x - y dy \right) dx = \int_{-4}^{+4} (20 - 2x) \sqrt{16 - x^2} dx = 160\pi.$$

## 4. Drievoudige integraal

Beschouwen we een functie  $f(x, y, z)$  die afhangt van drie veranderlijken, en een domein  $V$  in de drie-dimensionale ruimte. We delen dan, zoals tevoren, dit domein  $V$  op in een aantal deelgebieden  $R_i, i = 1, 2, \dots, n$ , en we kiezen in elk gebied  $R_i$  een willekeurig punt  $(x_i, y_i, z_i)$ . Tenslotte berekenen we de som

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \text{Vol}(R_i),$$

en laten we  $n$  oneindig groot worden, waarbij we ervoor zorgen dat het volume van alle deelgebieden  $R_i$  naar nul streeft. De limiet van deze som  $S_n$  is dan onafhankelijk van onze keuzes, en we noemen deze limiet de integraal van de functie  $f$  over het domein  $V$ ,

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Kiezen we, in het bijzonder, de constante functie  $f(x, y, z) = 1$ , dan kan de drievoudige integraal

$$\iiint_V dV = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

geïnterpreteerd worden als het volume van het gebied  $V$ .



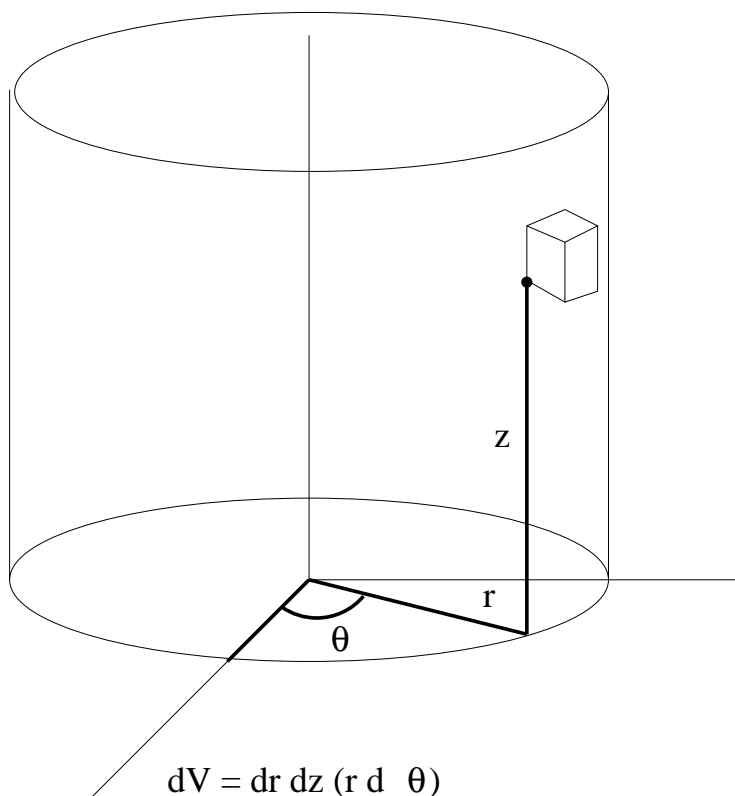
Het is soms eenvoudiger het gebied  $V$  te beschrijven met behulp van cilindercoördinaten  $(r, \theta, z)$  of bolcoördinaten  $(r, \theta, \varphi)$  in plaats van cartesische coördinaten  $(x, y, z)$ . Om het volume van een dergelijk gebied te berekenen, bepalen we eerst het volume van het elementaire gebied  $dV$  dat overeenkomt met infinitesimale toenames van de drie coördinaten.

Wanneer we werken met cilindercoördinaten  $(r, \theta, z)$ , kunnen we aantonen dat een infinitesimale toename  $dr, d\theta, dz$  van de coördinaten overeenkomt met een elementair volume

$$dV = dr(r d\theta) dz,$$

en het volume wordt daarom gegeven door de drievoudige integraal

$$\int \int \int_V r dr d\theta dz.$$



Figuur 66. Cilindercoördinaten en volumeberekening

**Voorbeeld 7.** De kegel met basis  $R$  en hoogte  $h$  wordt in cilindercoördinaten gegeven door het gebied  $V$ , begrensd door

$$z = 0 \dots h, \quad \theta = 0 \dots 2\pi, \quad r = 0 \dots \frac{R}{h}(h - z),$$

en het volume van de kegel is bijgevolg gegeven door

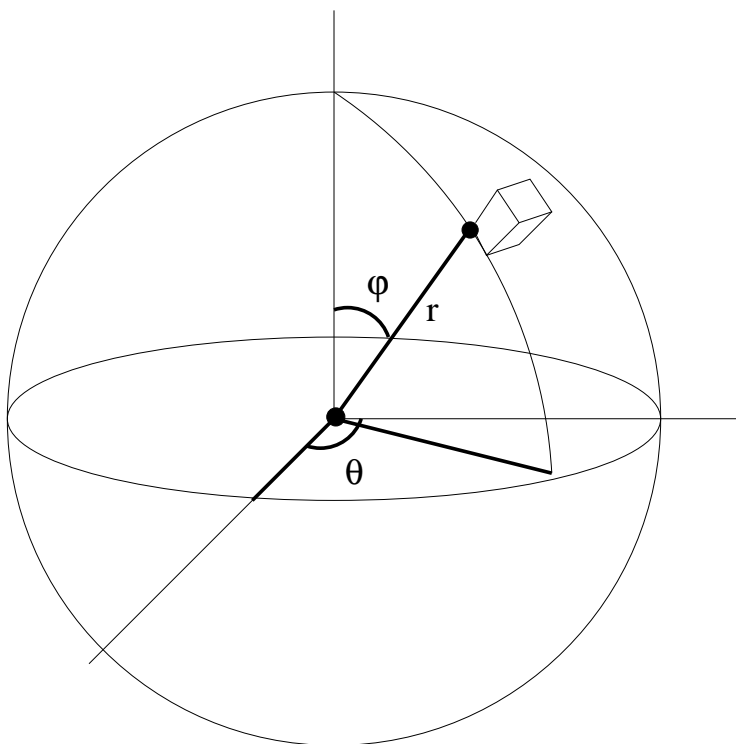
$$\int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r dr \right) d\theta \right) dz = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Wanneer we werken met bolcoördinaten  $(r, \theta, \varphi)$ , zien we dat een infinitesimale toename  $dr$ ,  $d\theta$ ,  $d\varphi$  van deze coördinaten overeenkomt met een elementair volume

$$dV = dr(r \sin \varphi d\theta)(r d\varphi),$$

en het volume komt daarom overeen met de drievoudige integraal

$$\int \int \int_V r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$



$$dV = dr (r d\varphi) (r \sin \varphi d\theta)$$

Figuur 67. Bolcoördinaten en volumeberekening

**Voorbeeld 8.** In bolcoördinaten wordt de bol met straal  $R$  beschreven door het balkvormig gebied

$$r = 0 \dots R, \quad \theta = 0 \dots 2\pi, \quad \varphi = 0 \dots \pi.$$

Het volume van de bol is bijgevolg

$$\int_0^R r^2 \left( \int_0^\pi \sin \varphi \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\varphi \right) dr = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

# HOOFDSTUK 13

## NUMERIEKE INTEGRATIE

### 1. Inleiding

Bij het berekenen van de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)dx$$

van een gegeven reële functie over het interval  $[a, b]$  hebben we, in wat voorafgaat, gebruik gemaakt van de *basisstelling van de integraalrekening*, die zegt dat

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

waarbij  $F(x)$  een willekeurige primitieve functie van  $f(x)$  is, dit wil zeggen dat

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

In bepaalde gevallen is het berekenen van een primitieve functie van een gegeven functie (dus de onbepaalde integratie) echter niet mogelijk (bijvoorbeeld voor de functie  $y = e^{-x^2}$ ) of zeer moeilijk. In deze gevallen kunnen we gebruik maken van een aantal technieken die toelaten, met een willekeurige graad van nauwkeurigheid, een benaderde waarde te berekenen van de gezochte bepaalde integraal. We doen dit door, op een bepaalde manier, een *benaderde* waarde voor de oppervlakte van het vlakke gebied tussen de grafiek van de functie  $y = f(x)$  en de  $x$ -as te berekenen. In dit hoofdstuk behandelen we drie dergelijke technieken.

## 2. De regel van het centrale punt (midpoint regel)

Om de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)dx$$

van de functie  $y = f(x)$  over het interval  $[a, b]$  (bij benadering) te berekenen, delen we het interval  $[a, b]$  eerst op in  $n$  stukken van gelijke lengte

$$h = \frac{b - a}{n},$$

en we noteren de randpunten van deze verschillende intervallen met

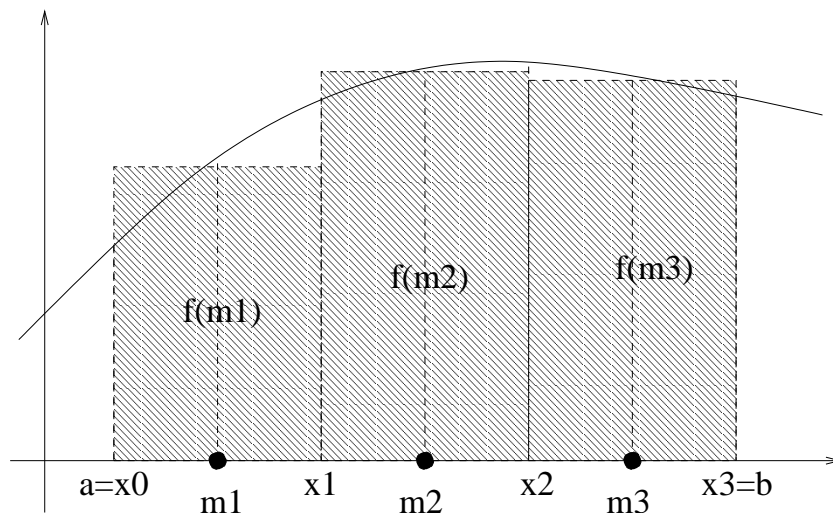
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Van elk interval  $[x_{i-1}, x_i]$  berekenen we het middelpunt, dat we aanduiden met

$$m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Het is dan duidelijk dat de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de kromme en de  $x$ -as (dus de gezochte bepaalde integraal) bij benadering gegeven wordt door de som van de oppervlakten van de rechthoeken met basis  $h$  en hoogte  $f(m_i)$ , dus door

$$f(m_1)h + f(m_2)h + \dots + f(m_n)h = h \sum_{i=1}^n f(m_i).$$



Figuur 68. De regel van het centrale punt

**Voorbeeld 1.** Om de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

te berekenen met behulp van de regel van het centrale punt delen we het interval  $[0, \frac{1}{2}]$  op in 5 gelijke delen met lengte

$$h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{5} = \frac{1}{10}.$$

De randpunten van de verschillende intervallen worden gegeven door

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{10}, \quad x_2 = \frac{2}{10}, \quad x_3 = \frac{3}{10}, \quad x_4 = \frac{4}{10}, \quad x_5 = \frac{5}{10},$$

en de middelpunten van deze intervallen zijn bijgevolg

$$m_1 = \frac{1}{20}, \quad m_2 = \frac{3}{20}, \quad m_3 = \frac{5}{20}, \quad m_4 = \frac{7}{20}, \quad m_5 = \frac{9}{20}.$$

De functiewaarden van deze middelpunten onder de functie  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  worden gegeven door

$$f(m_1) = 0.9975, \quad f(m_2) = 0.9780, \quad f(m_3) = 0.9412, \quad f(m_4) = 0.8909, \quad f(m_5) = 0.8316,$$

en de benaderde waarde van de integraal is dan

$$\frac{1}{10}(f(m_1) + \dots + f(m_5)) = \frac{4.6392}{10} = 0.4639.$$

Ter vergelijking : de werkelijke waarde van de integraal wordt gegeven door

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x)|_0^{\frac{1}{2}} = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 0.46364761.$$

### 3. De trapeziumregel

Bij deze methode verdelen we het interval  $[a, b]$  opnieuw in  $n$  delen met dezelfde lengte

$$h = \frac{b-a}{n},$$

en we noteren de randpunten van de bekomen intervallen zoals tevoren met

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

De functiewaarden van deze randpunten duiden we aan met

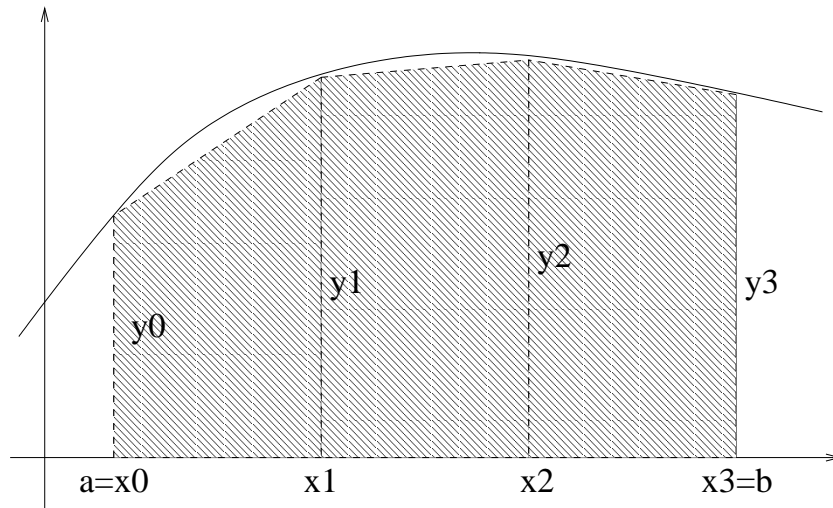
$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

We kunnen de oppervlakte van het gebied tussen de kromme en de  $x$ -as nu bij benadering berekenen als de som van de oppervlakten van een aantal trapeziums met hoogte  $h$  en (grote en kleine) basissen  $y_{i-1}$  en  $y_i$ . De oppervlakte van een dergelijk trapezium wordt gegeven door

$$S_i = h \frac{y_i + y_{i-1}}{2},$$

en we besluiten dat de bepaalde integraal bij benadering gegeven wordt door

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n h \frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$



Figuur 69. *De trapeziumregel*

**Voorbeeld 2.** We berekenen opnieuw de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

maar we gebruiken ditmaal de trapeziumregel. We splitsen daarom het interval  $[0, \frac{1}{2}]$  op in 5 gelijke delen met lengte

$$h = \frac{1}{10}.$$

De randpunten van deze intervallen worden, zoals tevoren, gegeven door

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{10}, \quad x_2 = \frac{2}{10}, \quad x_3 = \frac{3}{10}, \quad x_4 = \frac{4}{10}, \quad x_5 = \frac{5}{10},$$

en de functiewaarden van deze randpunten onder de functie  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  zijn bijgevolg

$$\begin{aligned} y_0 = f(x_0) &= 1, & y_1 = f(x_1) &= 0.9901, & y_2 = f(x_2) &= 0.9615, \\ y_3 = f(x_3) &= 0.9174, & y_4 = f(x_4) &= 0.8621, & y_5 = f(x_5) &= 0.8. \end{aligned}$$

De bepaalde integraal wordt dan bij benadering gegeven door

$$\frac{1}{20}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) = \frac{9.2622}{20} = 0.4631.$$

## 4. De regel van Simpson

Om de integraal van een functie te berekenen met behulp van de regel van Simpson verdelen we het interval  $[a, b]$  in een *even* aantal delen (dat we aanduiden als  $2n$ ) met gelijke lengte

$$h = \frac{b - a}{2n}.$$

We noteren, zoals tevoren, de randpunten van deze intervallen met

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b,$$

en de beeldpunten van deze randpunten onder de functie  $f(x)$  duiden we aan met

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

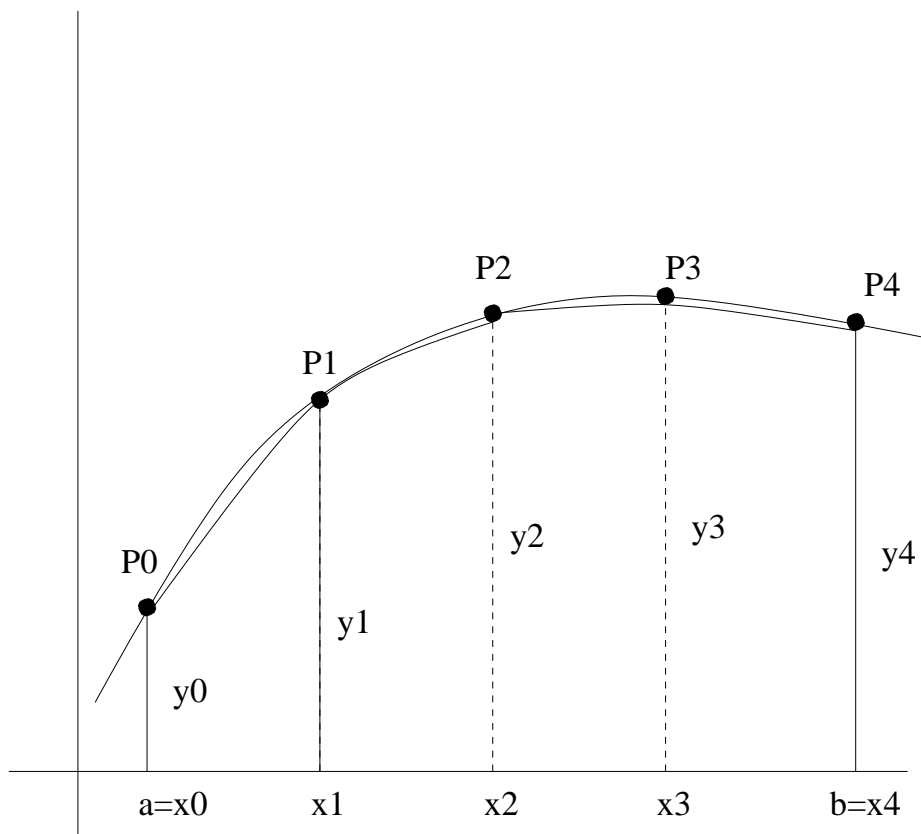
Voor elk drietal punten  $x_{2i-2}$ ,  $x_{2i-1}$ ,  $x_{2i}$  bepalen we nu een parabool met vergelijking  $y = Ax^2 + Bx + C$ , waarbij  $A$ ,  $B$  en  $C$  zodanig gekozen worden dat de parabool en de kromme  $y = f(x)$  samenvallen in de drie punten

$$P_{2i-2} = (x_{2i-2}, y_{2i-2}), \quad P_{2i-1} = (x_{2i-1}, y_{2i-1}), \quad P_{2i} = (x_{2i}, y_{2i}).$$

De oppervlakte van het gebied tussen de  $x$ -as en deze parabool wordt gegeven door

$$S_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (Ax^2 + Bx + C) dx,$$

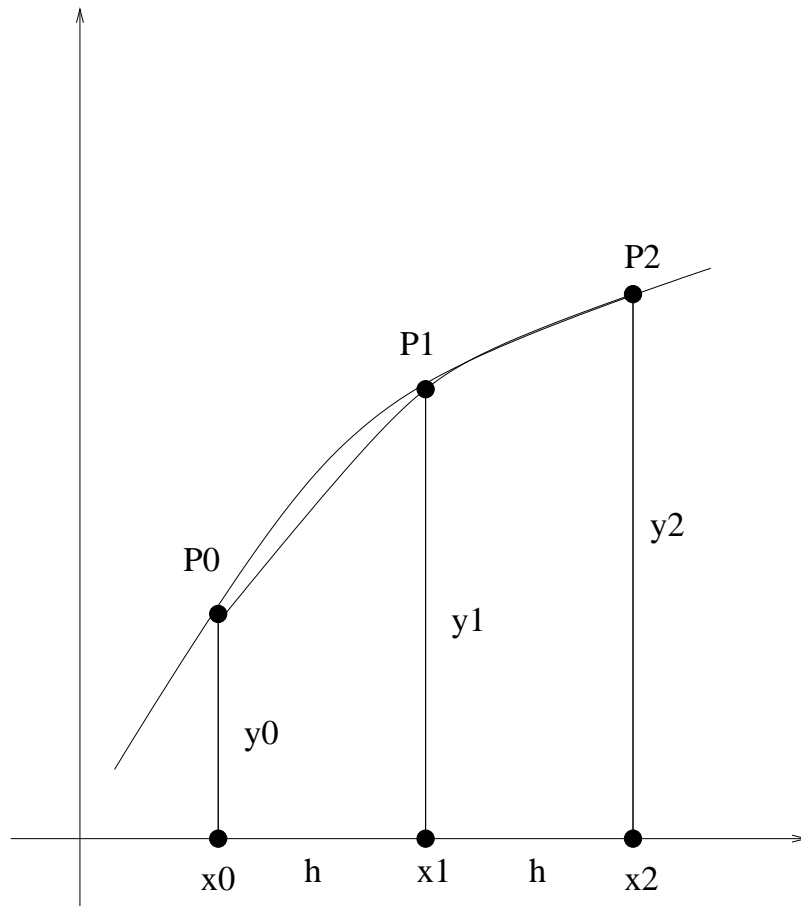
en we kunnen de oppervlakte tussen de kromme en de  $x$ -as dan (bij benadering) berekenen als de som van de oppervlakten  $S_i$  tussen de  $x$ -as en deze  $n$  parabolen.



Figuur 70. De regel van Simpson

We berekenen nu de oppervlakte tussen de  $x$ -as en één van deze parabolen. We beschouwen daarom bijvoorbeeld de drie punten

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2).$$



Figuur 71. *De regel van Simpson*

De gezochte parabool heeft vergelijking

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

en het gebied tussen deze kromme en de  $x$ -as heeft als oppervlakte

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C) dx \\ &= \frac{A}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{B}{2}(x_2^2 - x_0^2) + C(x_2 - x_0) \\ &= (x_2 - x_0) \left( \frac{A}{3}(x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2) + \frac{B}{2}(x_2 + x_0) + C \right) \\ &= 2h \left( \frac{A}{3}(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + \frac{B}{2}(2x_0 + 2h) + C \right) \\ &= \frac{h}{3}(2A(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + 6B(x_0 + h) + 6C). \end{aligned}$$



De getallen  $A, B, C$  zijn zó gekozen dat

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C, \quad y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C, \quad y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C,$$

en bijgevolg is

$$\begin{aligned} y_0 + 4y_1 + y_2 &= (Ax_0^2 + Bx_0 + C) + 4(Ax_1^2 + Bx_1 + C) + (Ax_2^2 + Bx_2 + C) \\ &= 6Ax_0^2 + 12Ahx_0 + 8Ah^2 + 6Bx_0 + 6Bh + 6C \\ &= 2A(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + 6B(x_0 + h) + 6C, \end{aligned}$$

en we besluiten dat

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

We zien dan dat de oppervlakte van de figuur tussen de kromme  $y = f(x)$  en de  $x$ -as bij benadering gegeven wordt door

$$\begin{aligned} &\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}). \end{aligned}$$

**Voorbeeld 3.** We berekenen opnieuw de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

ditmaal met de regel van Simpson waarbij we  $n = 2$  stellen. We verdelen het interval  $[0, \frac{1}{2}]$  dus in 4 gelijke delen met lengte  $h = \frac{1}{8}$ . De randpunten van de verschillende intervallen worden gegeven door

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{8}, \quad x_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{8}, \quad x_4 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

en de beeldpunten van deze getallen onder de functie  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  zijn bijgevolg

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0.9846, \quad y_2 = 0.9412, \quad y_3 = 0.8767, \quad y_4 = 0.8.$$

De benaderde waarde van de integraal wordt dan gegeven door

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{11.1276}{24} = 0.46365.$$