Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Onderwijseenheid 5
Exacte Wetenschappen en Informatica

Driehoeksmeting

Peter Bueken

HZS-OE5-NW140
Eerste jaar Bachelor Nautische Wetenschappen
Versie 1.2
1 juli 2006

Inhoudstafel

Hoofdstuk 1

Goniometrie en driehoeksmeting

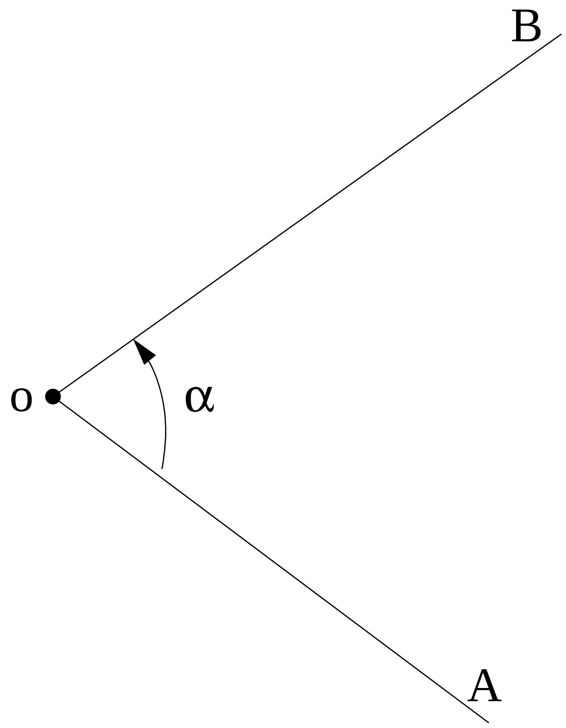
1. Inleiding

Goniometrie is de tak van de wiskunde die zich bezighoudt met de studie van *(georiënteerde) hoeken*. Het centrale onderwerp van deze wetenschap is de studie van een aantal *goniometrische getallen* die aan een hoek kunnen geassociëerd worden.

In de *(vlakke) driehoeksmeting* of *trigonometrie* past men de resultaten en methoden van de goniometrie toe bij de studie van driehoeken. Een centraal probleem van de trigonometrie is het *oplossen van driehoeken*, het bepalen van afmetingen (en hoeken) van een driehoek aan de hand van zijn andere afmetingen en hoeken. De belangrijkste toepassingen van trigonometrie, die tevens een belangrijke rol speelden bij de ontwikkeling van deze wetenschap, zijn *navigatie*, *sterrenkunde* en *topografie* of *landmeetkunde*.

2. Georiënteerde hoeken

Een *(georiënteerde) hoek* bestaat uit twee halve rechten A en B, de *benen* van de hoek genoemd, die vertrekken uit een zelfde punt o, dat we het *hoekpunt* noemen. We noemen twee hoeken *gelijk* (of *even groot*) indien ze door een verplaatsing (verschuiving en draaiing) op mekaar kunnen worden afgebeeld. We merken hierbij op dat de *volgorde* van de benen belangrijk is (vandaar de verwijzing naar een oriëntatie). We zullen deze oriëntatie, dus de volgorde van de benen van de hoek, aangeven door een pijltje. Wanneer de volgorde van de benen van een hoek wordt omgedraaid bekomen we de *tegengestelde hoek*.



Figuur 1. *Een georiënteerde hoek.*

3. De goniometrische cirkel

Een *goniometrische cirkel* is een cirkel waarvan de straal overeenkomt met de gebruikte eenheid van lengte ($R = 1$) en waarop een speciaal punt is aangeduid. Door beide benen van de hoek te laten vertrekken uit het middelpunt van de cirkel, en het eerste been A van de hoek door het speciale punt te laten lopen, komt met elke hoek α juist één punt a op de cirkel overeen. We zullen deze cirkel vaak gebruiken voor het bestuderen van goniometrische constructies.

4. Meten van hoeken

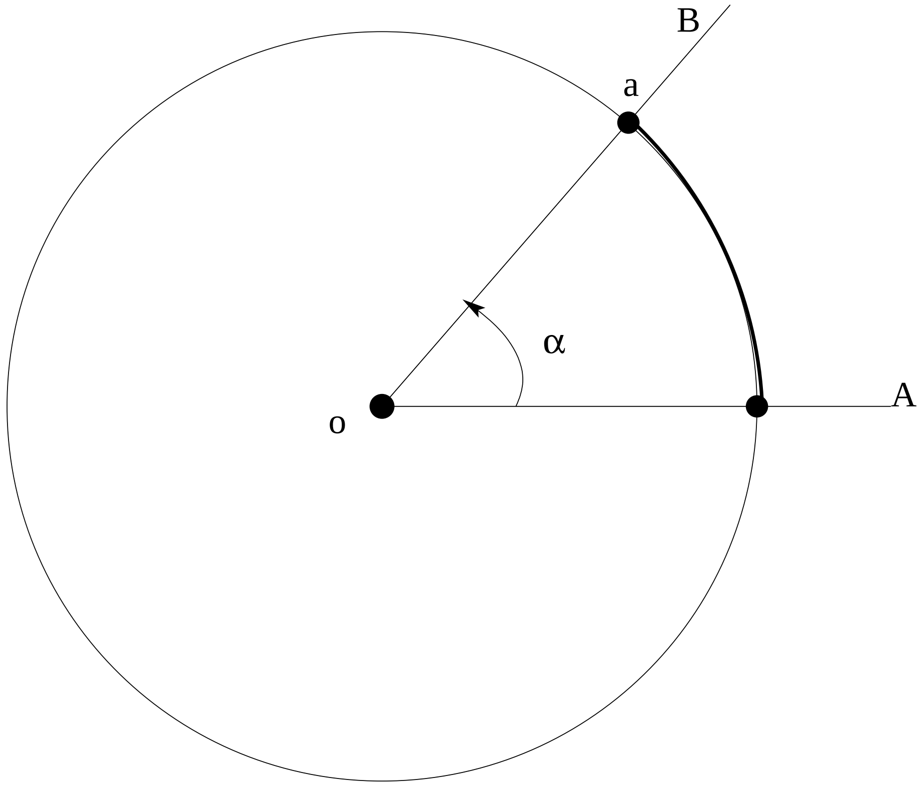
Om de grootte van een hoek α te meten vergelijkt men de lengte van de cirkelboog, die door de hoek afgetekend wordt op een cirkel met middelpunt in het hoekpunt o, met de omtrek van de cirkel. Men gebruikt traditioneel twee verschillende eenheden om de grootte van een hoek aan te duiden: *graden-minuten-seconden* en *radialen.*

1. Graden, minuten, seconden

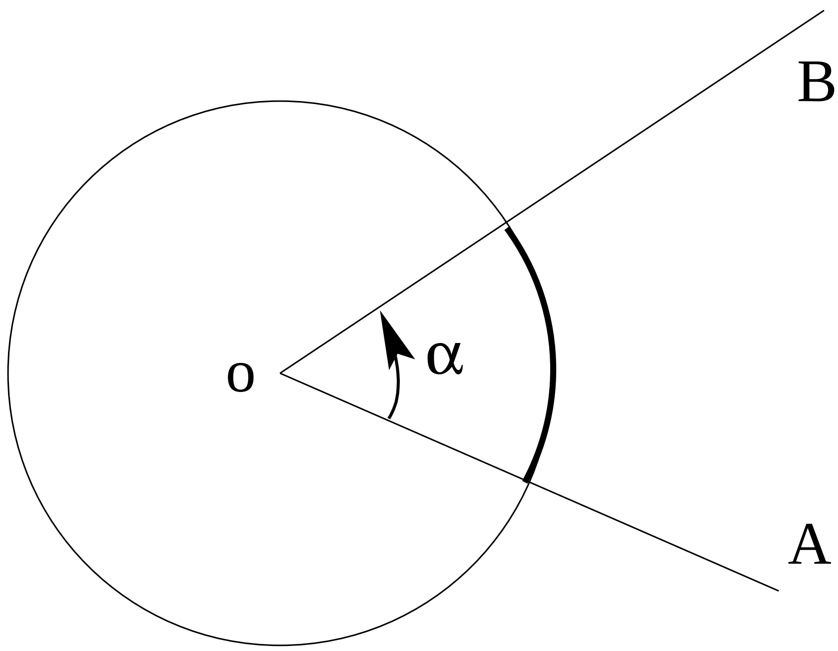
We zeggen dat een hoek 1 graad ($1°$) meet wanneer hij een cirkelboog aftekent waarvan de lengte $\frac{1}{360}$ van de omtrek van de cirkel meet. Om ook kleinere hoeken te kunnen aangeven (en om een grotere precisie te bereiken) stelt men verder dat

$$1° = 60^{'}, \qquad 1^{'} = 60^{''}.$$

Een hoek van $15°34^{'}42^{''}$ tekent dus een cirkelboog af waarvan de lengte overeenkomt met $(15 + \frac{34}{60} + \frac{42}{3600})\frac{1}{360} \approx \frac{43}{1000}$ van de omtrek van de cirkel. Omdat we met georiënteerde



Figuur 2. *Aanduiding van een hoek α op een goniometrische cirkel.*



Figuur 3. *Cirkelboog geassociëerd aan een gegeven hoek α.*

hoeken werken, spreken we af dat deze hoeken ook telkens in *tegenwijzerzin* worden gemeten. Wanneer we een hoek meten in wijzerzin, geven we dit aan door de grootte als een negatief getal te schrijven.

Een hoek van 360° komt overeen met een volledige omtrek van de cirkel. Beide benen van deze hoek vallen samen, en bijgevolg is deze hoek (de *volle hoek*) gelijk aan de *nulhoek*. Bij een willekeurige hoek α een veelvoud van $360°$ bijtellen levert dezelfde hoek. In het bijzonder kunnen we op deze wijze van een negatieve hoek (bijvoorbeeld $-30°$) steeds een positieve hoek (tussen $0°$ en $360°$) maken (bijvoorbeeld $-30° + 360° = 330°$). Dit komt overeen met het meten van de hoek in de andere richting, en het eventueel weglaten van een aantal volledige omwentelingen.

2. Radialen

Een hoek van 1 radiaal (1 rad) tekent op een cirkel een boog af waarvan de lengte overeenkomt met de straal R van de cirkel. Omdat de omtrek van de cirkel met straal R gelijk is aan $2\pi R$, volgt hieruit dat de volle hoek ($360°$) overeenkomt met 2π rad. We kunnen bijgevolg bij elke hoek waarvan de grootte is aangegeven in radialen een veelvoud van 2π rad bijtellen zonder daarmee de hoek te veranderen. Zo is bijvoorbeeld

$$-\frac{\pi}{3} \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} + 2\pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad.}$$

We kunnen ook vrij eenvoudig hoeken uitgedrukt in graden omzetten naar radialen en omgekeerd. We weten immers dat

$$2\pi \text{ rad} = 360°,$$

en dus is

$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi}° \approx 57,295779° \approx 57°17'44,8''$$

Bijgevolg is

$$30° = 30\frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$
$$12°17'35'' \approx 12,29 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 0,21 \text{ rad.}$$

en is omgekeerd

$$2 \text{ rad} = 2\frac{360}{2\pi}° \approx 114°35'30''.$$

5. Speciale en verwante hoeken

- De *nulhoek* heeft twee samenvallende benen, en meet dus $0° = 0$ rad. De *volle hoek* meet $360° = 2\pi$ rad, en is gelijk aan de nulhoek.
- Een *gestrekte hoek* meet $180° = \pi$ rad. De benen van een gestrekte hoek liggen in elkaars verlengde.
- Een hoek wordt een *rechte* hoek genoemd wanneer hij $\pm 90° = \pm\frac{\pi}{2}$ rad meet. We zeggen dat een hoek α *scherp* is wanneer

$$-90° < \alpha < 90°, \qquad -\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Als

$$90° < \alpha < 270°, \qquad \frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ rad},$$

wordt de hoek α een *stompe hoek* genoemd.

- De *tegengestelde* hoek van de hoek α is de hoek

$$-\alpha = -\alpha + 2\pi \text{ rad} = -\alpha + 360°.$$

- Twee hoeken worden *complementair* genoemd wanneer hun som $90° = \frac{\pi}{2}$ rad bedraagt. De complementaire hoek van α is dus

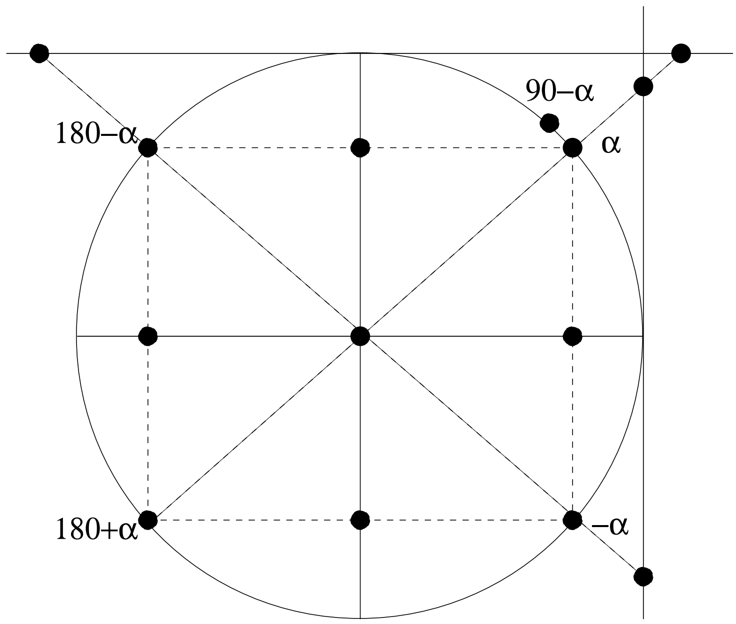
$$\beta = 90° - \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} - \alpha.$$

- Twee hoeken zijn *supplementair* wanneer hun som $180° = \pi$ rad bedraagt. De supplementaire hoek van α is bijgevolg

$$\beta = \pi \text{ rad} - \alpha = 180° - \alpha.$$

- Twee hoeken zijn *antisupplementair* wanneer hun verschil $180° = \pi$ rad bedraagt. De antisupplementaire hoek van α is bijgevolg

$$\beta = \pi \text{ rad} + \alpha = 180° + \alpha.$$



Figuur 4. *Verwante hoeken van een gegeven hoek α.*

- Omwille van hun interessante eigenschappen spelen de hoeken van $0° = 0$ rad, $30° = \frac{\pi}{6}$ rad, $45° = \frac{\pi}{4}$ rad, $60° = \frac{\pi}{3}$ rad, $90° = \frac{\pi}{2}$ rad en hun tegengestelde, supplementaire en antisupplementaire hoeken een belangrijke rol in de goniometrie.

6. Goniometrische getallen

Beschouwen we een (scherpe) hoek α, gevormd door het hoekpunt o en de benen A en B. We kiezen op B een punt b, en projecteren dit punt loodrecht op de halve rechte A. Het snijpunt duiden we aan met a. Dan blijkt dat de onderlinge verhoudingen van de lengtes oa, ob en ab,

$$\frac{oa}{ob}, \quad \frac{ab}{ob}, \quad \frac{ab}{oa}$$

niet afhangen van het gekozen punt b, maar enkel van de grootte van de hoek α. Kiezen we met andere woorden een willekeurig ander punt b' op B, en construeren we het bijhorende punt a' op A, dan geldt dat

$$\frac{oa}{ob} = \frac{oa'}{ob'}, \quad \frac{ab}{ob} = \frac{a'b'}{ob'}, \quad \frac{ab}{oa} = \frac{a'b'}{oa'}.$$

We definiëren daarom de *sinus* $\sin\alpha$ en de *cosinus* $\cos\alpha$ van de hoek α als

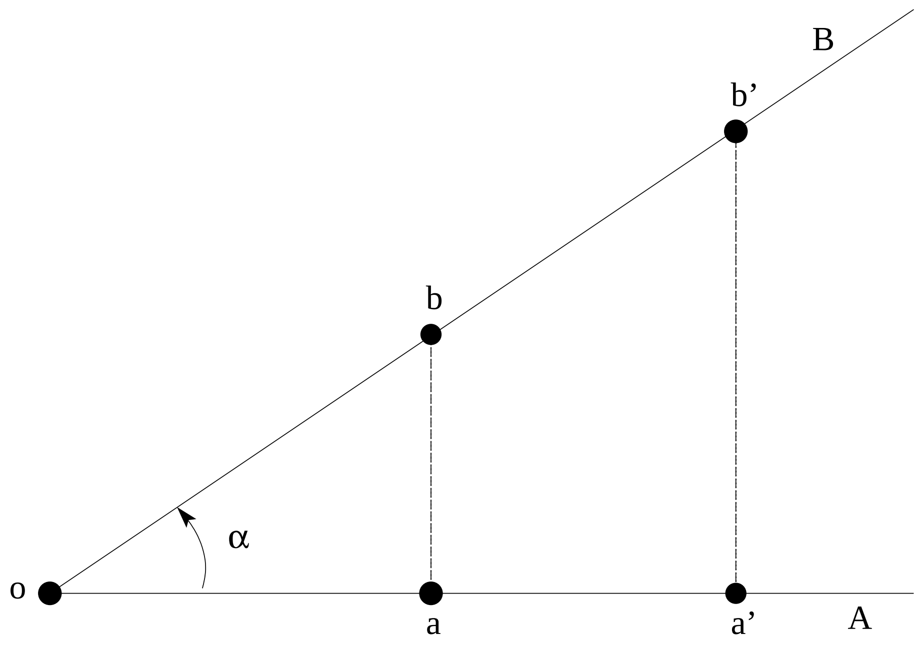
$$\sin\alpha = \frac{ab}{ob}, \quad \cos\alpha = \frac{oa}{ob}.$$

Verder definiëren we de *tangens* $\operatorname{tg}\alpha$ en de *cotangens* $\operatorname{cotg}\alpha$ van de hoek α als

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ab}{oa}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{oa}{ab}.$$

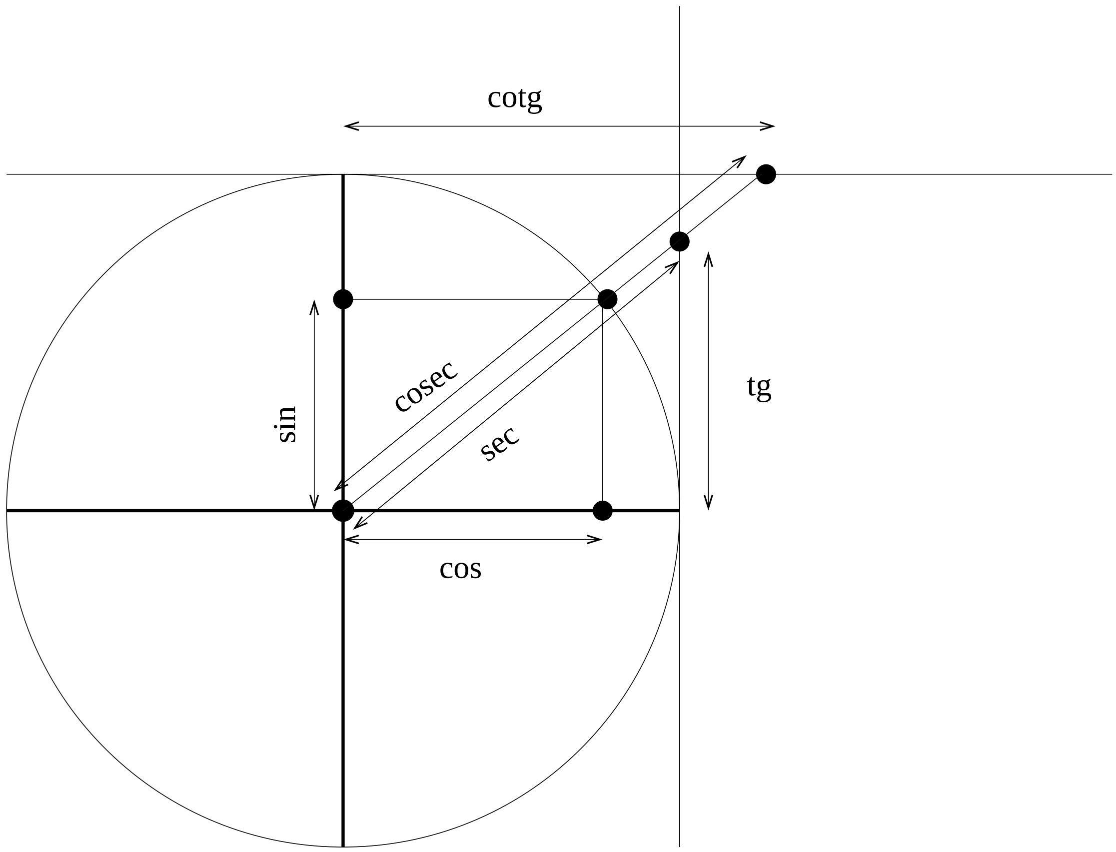
Tenslotte gebruikt men (uitzonderlijk) de *secans* $\sec\alpha$ en de *cosecans* $\operatorname{cosec}\alpha$ van de hoek α, die gedefiniëerd worden als

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$



Figuur 5. *Constructie van de goniometrische getallen van een hoek*

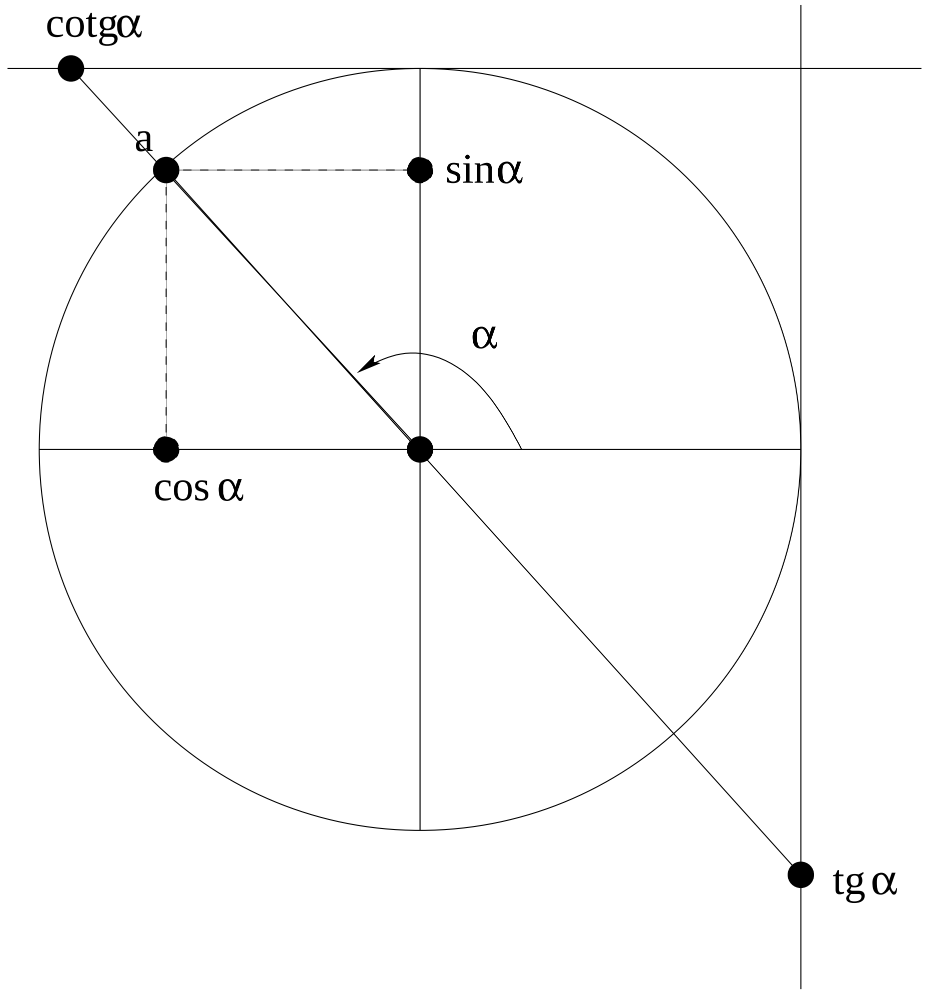
Stellen we nu de (scherpe) hoek α voor als een punt a op de goniometrische cirkel, dan zien we in Figuur 6 dat de cosinus en de sinus van α overeenkomen met de lengtes van de projecties van het overeenkomstig punt a op de horizontale en verticale as van de cirkel of met de x-coördinaat en de y-coördinaat van het punt a. Dit laat ons toe de definitie van $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ uit te breiden tot willekeurige (niet-scherpe) hoeken. We stellen daarvoor dat $\cos\alpha$ de x-coördinaat is van het overeenkomstig punt a, terwijl $\sin\alpha$ de y-coördinaat is van het punt a. Het is dan duidelijk dat, voor hoeken α waarvoor het overeenkomstige punt a *links* van de verticale as (respectievelijk *onder* de horizontale as) van de cirkel ligt, de goniometrische getallen $\cos\alpha$ (respectievelijk $\sin\alpha$) negatieve waarden zullen aannemen.



Figuur 6. *Betekenis van de goniometrische getallen op de goniometrische cirkel.*

De volgende tabel geeft de goniometrische getallen van een aantal zeer belangrijke hoeken.

α	$0°$ 0 rad	$30°$ $\frac{\pi}{6}$ rad	$45°$ $\frac{\pi}{4}$ rad	$60°$ $\frac{\pi}{3}$ rad	$90°$ $\frac{\pi}{2}$ rad	$180°$ π rad	$270°$ $\frac{3\pi}{2}$ rad
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞



Figuur 7. *Goniometrische getallen van een willekeurige hoek α.*

7. Belangrijke goniometrische identiteiten

De goniometrische getallen van één hoek, en de goniometrische getallen van een aantal verwante hoeken, worden verbonden door een groot aantal identiteiten.

Toepassen van de stelling van Pythagoras op de rechthoekige driehoeken uit Figuur 6 levert onmiddellijk dat

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Stel nu dat α en β willekeurige hoeken zijn. Dan kan worden aangetoond dat

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Door in deze formules α te vervangen door 0 en β te vervangen door α vinden we de goniometrische getallen voor de tegengestelde hoek $-\alpha$,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Door op dezelfde manier α te vervangen door π en β door α, vinden we voor de supplementaire hoek $\pi - \alpha$ dat

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

terwijl voor de antisupplementaire hoek $\pi + \alpha$ geldt dat

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Wanneer we α vervangen door $\frac{\pi}{2}$ en β door α vinden we voor de complementaire hoek $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dat

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Bovenstaande formules kunnen ook afgeleid worden uit de constructie in Figuur 4.

Door vervolgens $\alpha = \beta$ te stellen vinden we de *verdubbelingsformules*,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Oefening 1. Bereken $\sin 3\alpha$ en $\cos 3\alpha$ met behulp van $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.

Door de som en het verschil van bovenstaande identiteiten te berekenen vinden we de *formules van Simpson*,

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta),$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta).$$

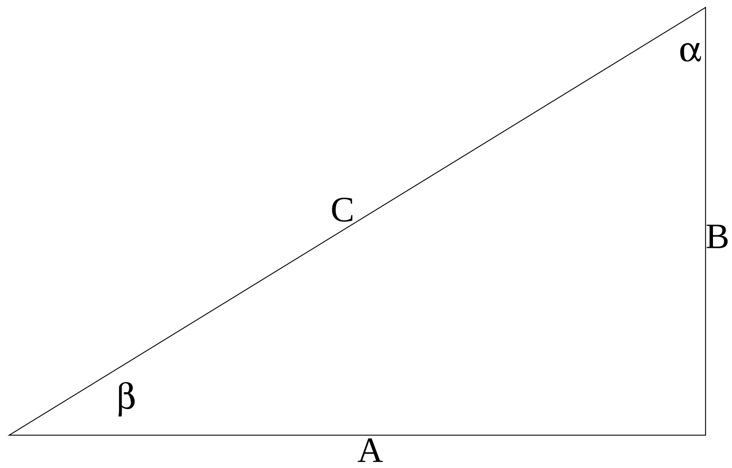
Door tenslotte $\alpha + \beta = \psi$ en $\alpha - \beta = \varphi$ te stellen vinden we

$$\sin(\psi) + \sin(\varphi) = 2\sin(\frac{\psi+\varphi}{2})\cos(\frac{\psi-\varphi}{2}),$$
$$\sin(\psi) - \sin(\varphi) = 2\cos(\frac{\psi+\varphi}{2})\sin(\frac{\psi-\varphi}{2}),$$
$$\cos(\psi) + \cos(\varphi) = 2\cos(\frac{\psi+\varphi}{2})\cos(\frac{\psi-\varphi}{2}),$$
$$\cos(\psi) - \cos(\varphi) = -2\sin(\frac{\psi+\varphi}{2})\sin(\frac{\psi-\varphi}{2}).$$

8. Oplossen van rechthoekige driehoeken

Het centrale probleem van de driehoeksmeting is het oplossen van driehoeken, dit wil zeggen het bepalen van een aantal afmetingen (lengtes van zijden en groottes van hoeken) van een driehoek aan de hand van gegeven afmetingen van andere hoeken en zijden. Het is duidelijk dat deze technieken een uiterst belangrijke rol zullen spelen in de navigatie en de landmeting, waar het bijvoorbeeld van groot belang kan zijn een afstand te bepalen (die niet rechtstreeks kan gemeten worden) op basis van andere gegevens die wél kunnen bepaald worden.

Een driehoek wordt *rechthoekig* genoemd indien één van de hoeken 90° meet. We benoemen de zijden en hoeken van de rechthoekige driehoek zoals aangegeven in Figuur 8.



Figuur 8. *Een rechthoekige driehoek.*

We baseren ons bij het oplossen van rechthoekige driehoeken op de volgende relaties die gelden in elke *rechthoekige* driehoek:

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta = 90^\circ,\\
&A^2 + B^2 = C^2, \quad \text{(de stelling van Pythagoras)}\\
&\frac{A}{C} = \sin\alpha = \cos\beta,\\
&\frac{B}{C} = \cos\alpha = \sin\beta,\\
&\frac{B}{A} = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,\\
&\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta.
\end{aligned}$$

1. Schuine zijde C en scherpe hoek β gekend.

In dit geval zien we dat

$$\alpha = 90^\circ - \beta,$$

terwijl

$$A = C\cos\beta, \quad B = C\sin\beta.$$

2. Rechthoekszijde B en overstaande scherpe hoek β gekend.

In dit geval is

$$\alpha = 90° - \beta,$$

terwijl

$$C = \frac{B}{\sin\beta}, \quad A = \frac{B}{\operatorname{tg}\beta}.$$

3. Schuine zijde C en rechthoekszijde A gekend.

Het is duidelijk dat in dit geval moet gelden dat $A < C$. Vervolgens is

$$B = \sqrt{C^2 - A^2},$$

terwijl

$$\cos\beta = \frac{A}{C}.$$

We kunnen dan de hoek β berekenen, en besluiten dat

$$\alpha = 90° - \beta.$$

4. Twee rechthoekszijden A en B gekend.

Uit de stelling van Pythagoras volgt nu dat

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},$$

terwijl

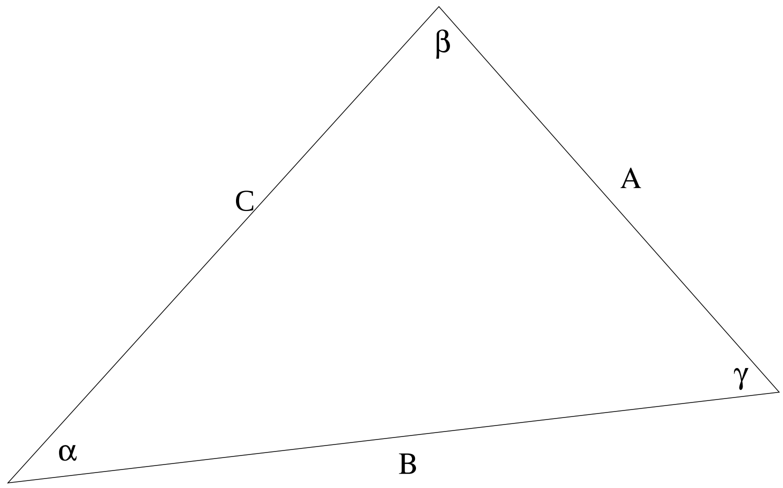
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{B}{A}.$$

Hieruit kunnen we β berekenen, en we zien onmiddellijk dat

$$\alpha = 90° - \beta.$$

9. Oplossen van willekeurige driehoeken

Voor het oplossen van willekeurige driehoeken baseren we ons op de volgende relaties tussen de zijden en hoeken van een willekeurige driehoek zoals aangegeven in Figuur 9.



Figuur 9. *Een willekeurige driehoek.*

Eerst en vooral toont men aan dat de som van de drie hoeken van een driehoek steeds gelijk is aan 180°,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

De *sinusregel* stelt verder dat

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma},$$

terwijl de *cosinusregel* de lengte van één zijde uitdrukt in functie van de andere zijden en de overstaande hoek,

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha,$$
$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta,$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma.$$

We merken op dat, wanneer de driehoek rechthoekig is (dus $\gamma = 90°$), de sinusregel en cosinusregel overeenkomen met de formules die gelden in een rechthoekige driehoek.

1. Twee zijden A en B en de ingesloten hoek γ gekend.

In dit geval is

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2BC\cos\gamma,$$

terwijl

$$\cos\beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC}.$$

We kunnen dan de hoek β bepalen, waarna we afleiden dat

$$\alpha = \pi \text{ rad} - (\beta + \gamma).$$

2. Drie zijden A, B en C gekend.

In dit geval leiden we uit de cosinusregel af dat

$$\cos\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}, \quad \cos\beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC},$$

waaruit we de hoeken α en β kunnen bepalen. Tenslotte is dan

$$\gamma = \pi \text{ rad} - (\alpha + \beta).$$

3. Een zijde A en twee hoeken β en γ gekend.

In dit geval is

$$\gamma = \pi \text{ rad} - (\beta + \gamma),$$

terwijl uit de sinusregel volgt dat

$$B = \frac{A\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad C = \frac{A\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

4. Twee zijden A en B en een overstaande hoek α gekend.

In dit geval volgt uit de sinusregel dat

$$\sin\beta = \frac{B\sin\alpha}{A}.$$

Deze formule laat ons toe de waarde van β te bepalen. Omdat $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$ vinden we echter twee mogelijke oplossingen voor de hoek β. Er zijn in dit geval dus mogelijk meerdere oplossingen voor de driehoek.

Omdat

$$\gamma = \pi \text{ rad} - (\beta + \alpha),$$

en we enkel positieve waarden voor γ aanvaarden, moeten we enkel die waarden van β aanvaarden waarvoor $\alpha + \beta < \pi$ rad. Het aantal oplossingen voor γ is bijgevolg 0, 1 of 2.

Voor elke mogelijke waarde van γ volgt dan uit de cosinusregel dat

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}.$$

Hoofdstuk 2

Boldriehoeksmeting

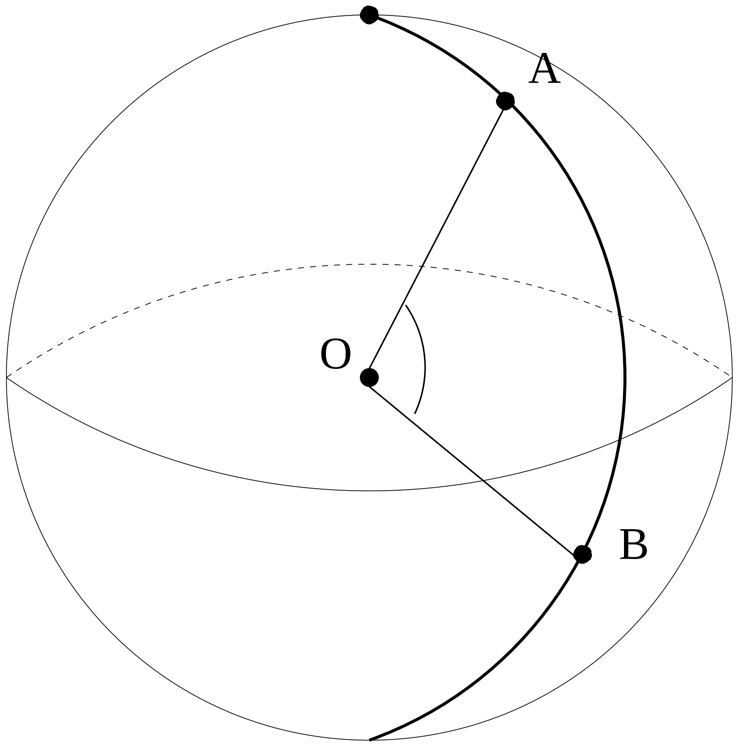
1. Inleiding

Een driehoek $\triangle ABC$ in het vlak wordt gevormd door een stel van drie hoekpunten A, B en C, en de lijnstukken (zijden) die deze hoekpunten verbinden (en die de kortste afstand tussen de hoekpunten realiseren). In de vlakke driehoeksmeting bestudeert men de relaties tussen de lengtes van de zijden en de hoeken gevormd door de zijden van een driehoek, en worden deze relaties gebruikt voor het berekenen van bepaalde afmetingen van een driehoek, vertrekkend van andere, gekende afmetingen van deze driehoek. We zagen in Hoofdstuk 1 dat de vlakke driehoeksmeting een belangrijke rol speelt bij het oplossen van problemen in de navigatie en de landmeting, wanneer de afstanden tussen de beschouwde punten relatief klein zijn, en we het aardoppervlak in de buurt van een punt kunnen beschouwen als een vlak.

Wanneer we echter grotere afstanden beschouwen, moeten we rekening houden met de kromming van de Aarde. Omdat het aardoppervlak vrij nauwkeurig kan beschreven worden als een boloppervlak, moeten we daarom een algemene studie maken van "driehoeken" op een boloppervlak, die we "boldriehoeken" noemen. We kunnen stellen dat een boldriehoek bestaat uit een stel punten A, B en C (de hoekpunten), gelegen op het boloppervlak, en verbonden door zijden, eveneens gelegen op het boloppervlak. Het doel van de boldriehoeksmeting is dan de studie van de relaties tussen de lengtes van deze zijden (de afstanden tussen de hoekpunten) en de hoeken, gevormd door de zijden van de boldriehoek, en het berekenen van ongekende afmetingen van een boldriehoek, vertrekkend van andere, gekende afmetingen van dezelfde driehoek. Omdat we op het boloppervlak geen gebruik kunnen maken van (rechte) lijnstukken en de hoeken gevormd door deze lijnstukken, moeten we eerst en vooral nagaan hoe we deze begrippen kunnen aanpassen om tot een exacte definitie van een boldriehoek te komen.

2. Algemene begrippen

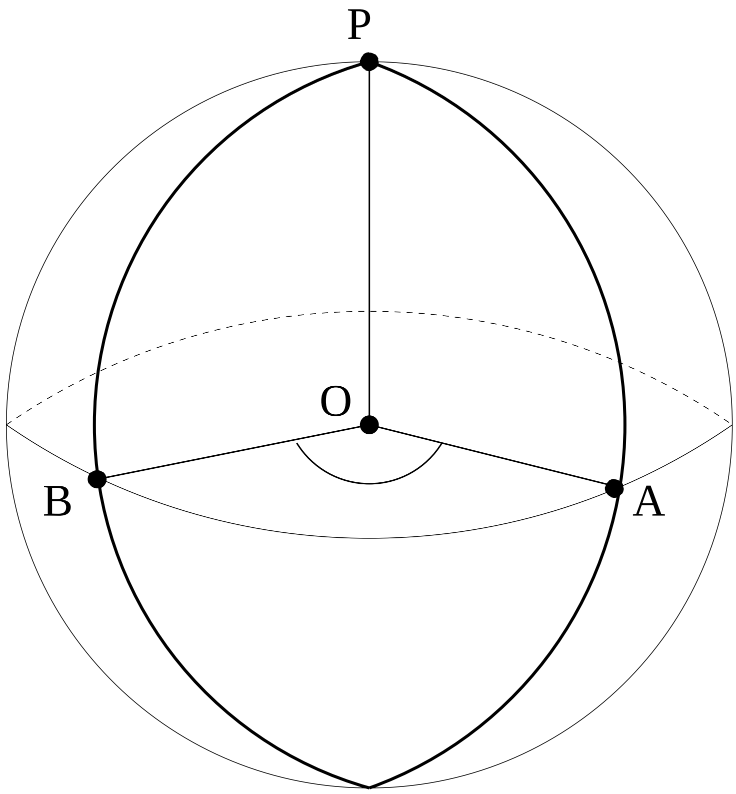
Beschouwen we een bol met middelpunt O en straal R, en twee punten A en B op het boloppervlak. Elk vlak door de punten O, A en B snijdt het boloppervlak volgens een cirkel, die we een *grote cirkel* van de bol noemen. Elke grote cirkel verdeelt het boloppervlak in twee gelijke delen of *hemisferen*.



Figuur 10. *Een grote cirkel op een boloppervlak*

Wanneer de punten A en B niet diametraal tegenover elkaar gelegen zijn, is het vlak door O, A en B uniek, en is er slechts een grote cirkel die de punten A en B verbindt. De twee punten A en B verdelen de cirkel dan in twee cirkelsegmenten, waarvan er een kleiner is dan een halve cirkel. Wanneer we over de *boog* $\widehat{\mathrm{AB}}$ spreken, bedoelen we steeds het kortste van deze twee cirkelsegmenten. De boog $\widehat{\mathrm{AB}}$ is de kortst mogelijke verbinding, op het boloppervlak gelegen, tussen de punten A en B, en de lengte van de boog $\widehat{\mathrm{AB}}$ wordt de *sferische afstand* van A tot B genoemd. De boog $\widehat{\mathrm{AB}}$ wordt bijgevolg, in de boldriehoeksmeting, gebruikt als uitbreiding van het begrip "lijnstuk" uit de vlakke driehoeksmeting.

Beschouwen we nu, op het boloppervlak, twee bogen $\widehat{\mathrm{AB}}$ en $\widehat{\mathrm{AC}}$, die elkaar snijden in het punt A. Dan vormen deze twee bogen een *bolhoek* $\widehat{BAC}$. De bogen $\widehat{\mathrm{AB}}$ en $\widehat{\mathrm{AC}}$ worden de *zijden* van deze bolhoek genoemd, het snijpunt A noemen we het *hoekpunt* van de bolhoek $\widehat{BAC}$. Het maatgetal van de bolhoek $\widehat{BAC}$ is dat van de hoek tussen de vlakken OAB en OAC, of van de hoek gevormd door de raaklijnen in A aan beide cirkelbogen.



Figuur 11. *Bolhoek gevormd door twee grote cirkels door een punt*

Beschouwen we nu drie punten A, B en C op het boloppervlak. Het gedeelte van het boloppervlak, begrensd door de bogen $c = \widehat{\mathrm{AB}}$, $a = \widehat{\mathrm{BC}}$ en $b = \widehat{\mathrm{CA}}$, wordt een *boldriehoek* genoemd. De bogen a, b en c die de figuur begrenzen worden de *zijden* van de boldriehoek genoemd, de punten A, B en C zijn de *hoekpunten* van de boldriehoek.

De boldriehoeksmeting bestudeert de relaties tussen de lengtes van de zijden van een boldriehoek (die we in wat volgt met hetzelfde symbool voorstellen als de zijde zelf) en de hoeken gevormd door deze zijden (die we voorstellen met dezelfde symbolen als de overeenkomstige hoekpunten). Omdat een zijde $a = \widehat{\mathrm{BC}}$ volledig bepaald wordt door de hoek $\widehat{BOC}$, zullen we in wat volgt de lengte van elke zijde van de boldriehoek aangeven als een hoek, die we uitdrukken in radialen of graden.

Opmerking. Het is eenvoudig af te leiden dat elke zijde en elke hoek van een boldriehoek kleiner is dan 180° of π radialen. Bovendien geldt in elke boldriehoek dat

- de som van twee zijden steeds groter is dan de derde zijde,

$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad c + a > b;$$

- de omtrek van de boldriehoek steeds kleiner is dan de omtrek van een grote cirkel,

$$a + b + c < 2\pi;$$

stellen we $a + b + c = 2p$, dan is

$$p < \pi, \qquad a < p, \quad b < p, \quad c < p;$$

- de overstaande hoeken van gelijke zijden gelijk zijn en omgekeerd,
$$a = b \Leftrightarrow A = B;$$
- als twee zijden ongelijk zijn, de grootste zijde zich tegenover de grootste hoek bevindt,
$$a > b \Leftrightarrow A > B;$$
- de som van de drie hoeken van de driehoek voldoet aan
$$\pi < A + B + C < 3\pi.$$

Beschouwen we nu een boog $\widehat{\text{AB}}$ op het boloppervlak. De rechte door het punt O, loodrecht op het vlak OAB, snijdt het boloppervlak in twee punten P_1 en P_2, die we de *polen* van de boog $\widehat{\text{AB}}$ (of van de overeenkomstige grote cirkel) noemen. (De grote cirkel kan beschouwd worden als de "evenaar" die overeenkomt met de gegeven polen.)

Opmerking. Veronderstellen we dat P een der polen is van de grote cirkel E op het boloppervlak, en kiezen we een nieuwe grote cirkel E' door het punt P. Dan is het eenvoudig in te zien dat de polen van de grote cirkel E' zich op de grote cirkel E zullen bevinden. Deze eigenschap zullen we aanduiden als *polaire wederkerigheid*.

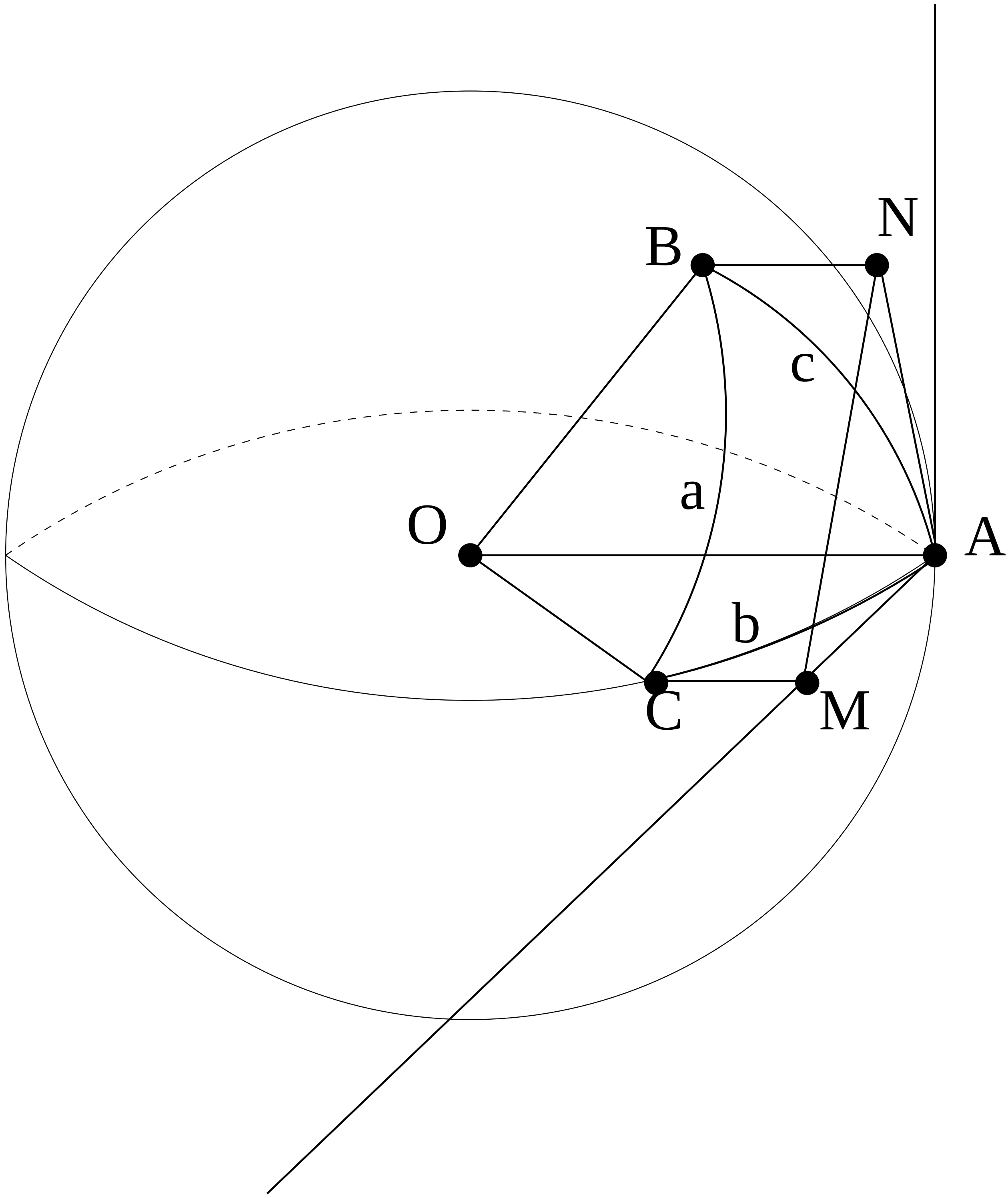
Beschouwen we nu de boldriehoek $\triangle ABC$, en kiezen we voor de zijde $a = \widehat{\text{BC}}$ (resp. $b = \widehat{\text{AC}}$, $c = \widehat{\text{AB}}$) van deze driehoek de pool A' (resp. B', C') die in dezelfde hemisfeer gelegen is als het overstaande hoekpunt A (resp. B, C), dan bekomen we een nieuwe boldriehoek $\triangle A'B'C'$, die we de *pooldriehoek* van de boldriehoek $\triangle ABC$ noemen.

Het is nu eenvoudig aan te tonen dat, indien $\triangle A'B'C'$ de pooldriehoek is van $\triangle ABC$, ook geldt dat $\triangle ABC$ de pooldriehoek is van $\triangle A'B'C'$. Om dit te bewijzen, veronderstellen we dat $\triangle A'B'C'$ de pooldriehoek is van de boldriehoek $\triangle ABC$, en dat A' (resp. B', C') dus de pool is van de zijde a (resp. b, c). Het volstaat dan aan te tonen dat het hoekpunt A de pool is van de zijde a'. Omdat de zijde a' van de pooldriehoek de hoekpunten B' en C' bevat, volgt uit polaire wederkerigheid dat de pool van a' gelegen is op de grote cirkels die overeenkomen met de zijden b en c. Deze cirkels snijden elkaar enkel in het punt A en zijn tegenpool, waaruit we besluiten dat het hoekpunt A de pool is van de zijde a'.

Verder geldt ook dat een zijde van een driehoek en het overeenkomstige hoekpunt van de pooldriehoek elkaars supplement zijn,
$$A + a' = B + b' = C + c' = a + A' = b + B' = c + C' = \pi. \tag{1}$$
Om dit aan te tonen volstaat het de zijde a' van de pooldriehoek te beschouwen als de evenaar die overeenkomt met de pool A. Wanneer we de zijden b en c door het punt A verlengen, snijden deze de "evenaar" in de punten D en E, en het is duidelijk dat de bolhoek A gelijk is aan de hoek $\widehat{DOE}$. Verder is B' de pool van de zijde $b = \widehat{\text{AC}}$, die het punt D bevat, en is C' de pool van de zijde c, die het punt E bevat. Omdat de hoek tussen de pool en een punt op de evenaar recht is, besluiten we dat
$$\widehat{B'OD} = \widehat{C'OE} = \frac{\pi}{2},$$
en hieruit volgt dat
$$\begin{aligned} \pi &= \widehat{B'OD} + \widehat{C'OE} \\ &= \widehat{B'OC'} + \widehat{DOE} \\ &= a' + A. \end{aligned}$$

3. Relaties tussen de elementen van een boldriehoek

1. De eerste cosinusregel



Figuur 12.

Beschouwen we de boldriehoek $\triangle ABC$, gelegen op een bol met straal 1. Het is duidelijk dat het raakvlak aan het boloppervlak in het hoekpunt A de raaklijnen bevat aan de bogen b en c die overeenkomen met de zijden van de boldriehoek. De orthogonale projecties van hoekpunten B (resp. C) op dit vlak duiden we aan met N (resp. M), en de projectie van B (resp. C) op de rechte OA duiden we aan met X (resp. Y).

Het is duidelijk dat de bolhoek $A = \widehat{BAC}$ overeenkomt met de hoek $\widehat{MAN}$ in het raakvlak, en door toepassing van de cosinusregel in de vlakke driehoek $\triangle AMN$ vinden we dat

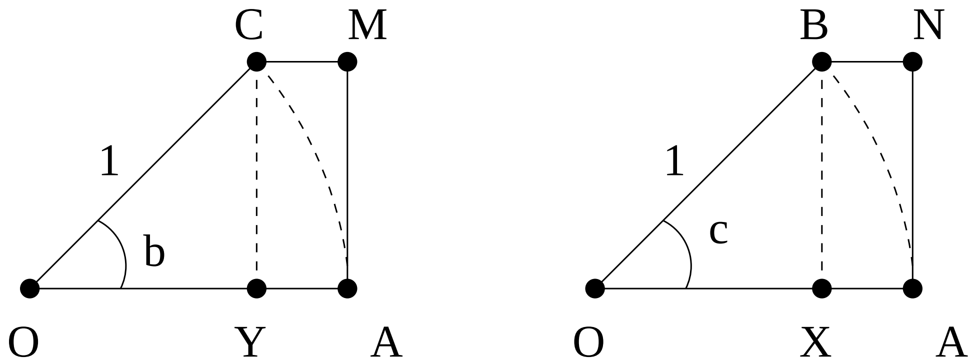
$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A.$$

We zien verder ook dat

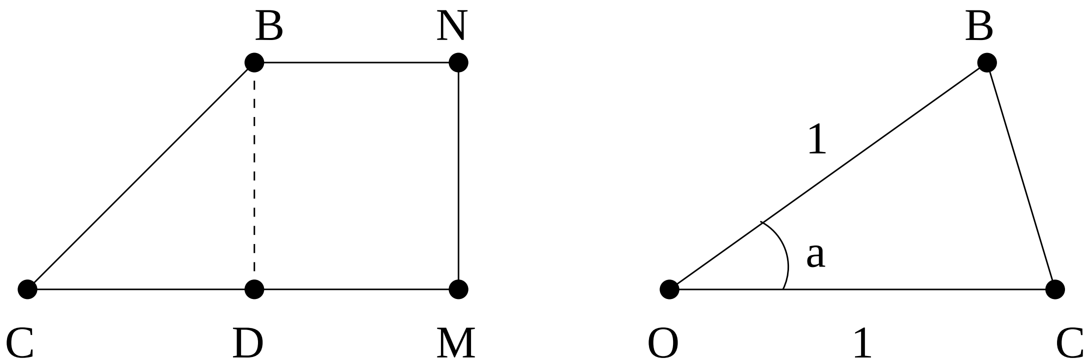
$$AM = CY = \sin b, \qquad AN = BX = \sin c.$$

Bijgevolg is

$$MN^2 = \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \sin b \sin c \cos A.$$



Figuur 13.



Figuur 14.

Beschouwen we vervolgens het trapezium $BNMC$, en duiden we met D de projectie van B op de zijde CM aan, dan volgt uit de stelling van Pythagoras dat

$$MN^2 = BD^2 = CB^2 - CD^2.$$

In de driehoek $\triangle OCB$ volgt uit de cosinusregel dat

$$\begin{aligned} CB^2 &= OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos a \\ &= 1 + 1 - 2\cos a \\ &= 2 - 2\cos a, \end{aligned}$$

terwijl we in het trapezium $BNMC$ zien dat

$$\begin{aligned} CD &= CM - DM \\ &= CM - BN \\ &= AY - AX \\ &= (OA - OY) - (OA - OX) \\ &= (1 - \cos b) - (1 - \cos c) \\ &= \cos c - \cos b. \end{aligned}$$

We besluiten dat

$$\begin{aligned} MN^2 &= (2 - 2\cos a) - (\cos c - \cos b)^2 \\ &= 2 - 2\cos a - \cos^2 c - \cos^2 b + 2\cos b \cos c. \end{aligned}$$

Vergelijking van beide uitdrukkingen voor MN^2 levert dat

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Door in het bewijs de benaming van de hoeken te verwisselen bekomen we de volgende resultaten, die de basis vormen van alle formules die in de rest van deze paragraaf afgeleid zullen worden.

Stelling 1. *(De eerste cosinusregel) In elke boldriehoek $\triangle ABC$ geldt dat*

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \tag{2}$$

2. De tweede cosinusregel

Beschouwen we een boldriehoek $\triangle ABC$, en passen we de eerste cosinusregel (2) toe in de pooldriehoek $\triangle A'B'C'$, dan zien we dat

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Gebruik makend van (1) zien we dat

$$\begin{aligned}
\cos a' &= -\cos A, & \cos A' &= -\cos a,\\
\cos b' &= -\cos B, & \sin b' &= \sin B,\\
\cos c' &= -\cos C, & \sin c' &= \sin C,
\end{aligned}$$

en we besluiten dat

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Door in het bewijs de benamingen van de hoeken en zijden te verwisselen bekomen we het volgende resultaat.

Stelling 2. *(De tweede cosinusregel) In elke boldriehoek $\triangle ABC$ geldt dat*

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,\\
\cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \qquad (3)\\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.
\end{aligned}$$

3. De sinusregel

Vertrekken we opnieuw van de eerste cosinusregel (2) in de boldriehoek $\triangle ABC$. We kunnen hieruit afleiden dat

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

en bijgevolg is

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1 - \cos^2 A\\
&= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right)^2\\
&= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}\\
&= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}\\
&= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.
\end{aligned}$$

We besluiten dat

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Door de benamingen van de onderdelen van de boldriehoek om te wisselen, vinden we dat

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c},$$

en omdat alle hoeken en zijden van een boldriehoek begrepen zijn tussen 0 en π radialen, en hun sinus dus positief is, bekomen we de volgende stelling.

Stelling 3. *(De sinusregel) In elke boldriehoek geldt dat*

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

4. De cotangensregel

Voor het afleiden van deze formule vertrekken we opnieuw van de eerste cosinusregel (2),

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.$$

Als we de tweede formule invullen in de eerste vinden we

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A,$$

waaruit we afleiden dat

$$\cos a(1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A.$$

Gebruik makend van de basisformule van de goniometrie vinden we dat

$$\cos a \sin^2 c = \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A,$$

en na deling door $\sin a \sin c$ bekomen we

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \frac{\sin b}{\sin a} \cos A.$$

Omdat uit de sinusregel volgt dat

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b},$$

vinden we dat

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \frac{\sin B}{\sin A} \cos A,$$

waaruit we afleiden dat

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A.$$

Door opnieuw in de afleiding hierboven de benamingen te verwisselen, bekomen we de volgende resultaten.

Stelling 4. *(De cotangensregel) In elke boldriehoek geldt dat*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A, \\
\operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B, \\
\operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A, \\
\operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotg} C, \\
\operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B, \\
\operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C.
\end{aligned}$$

4. Oplossen van rechthoekige boldriehoeken

Een *rechthoekige boldriehoek* is een boldriehoek waarvan een der hoeken gelijk is aan 90° of $\frac{\pi}{2}$ radialen.

1. Relaties tussen de elementen van een rechthoekige boldriehoek

In het geval van een rechthoekige boldriehoek kunnen we een aantal van de hierboven ingevoerde relaties sterk vereenvoudigen. Beschouwen we een rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$, waarbij we veronderstellen dat $A = \frac{\pi}{2}$. Dan weten we dat

$$\cos A = 0, \quad \sin A = 1, \quad \operatorname{cotg} A = 0.$$

Uit de eerste cosinusregel volgt dan onmiddellijk dat

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

terwijl uit de tweede cosinusregel volgt dat

$$\begin{aligned}
\cos a &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C, \\
\cos B &= \sin C \cos b, \\
\cos C &= \sin B \cos c.
\end{aligned}$$

Met behulp van de sinusregel leiden we af dat

$$\sin b = \sin a \sin B, \qquad \sin c = \sin a \sin C,$$

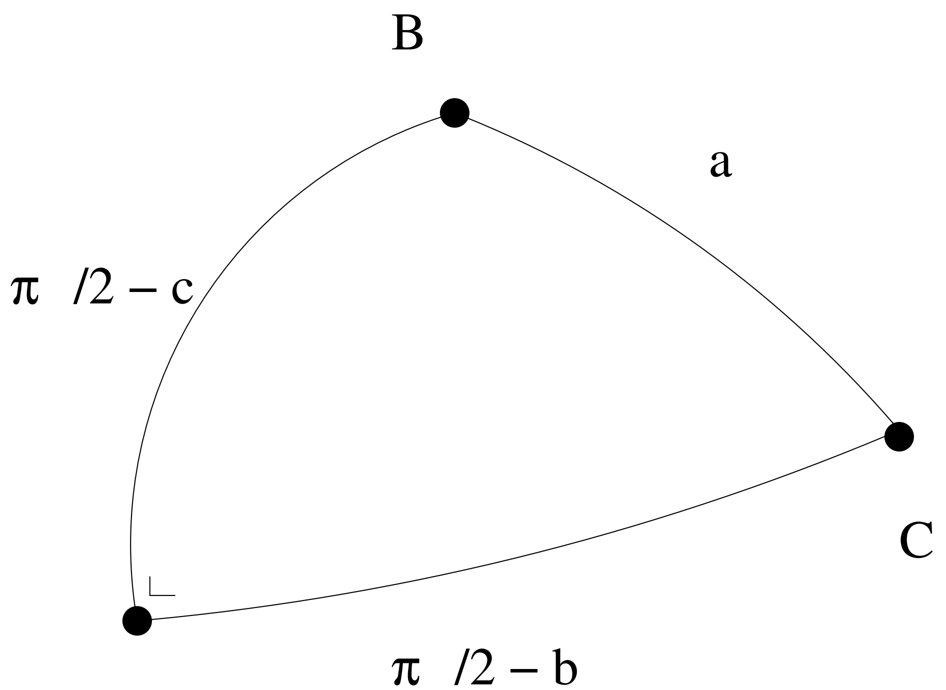
en de cotangensregel levert ons dat

$$\begin{aligned}
\cos B &= \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} c, \text{ op voorwaarde dat } \cos c \neq 0, \\
\cos C &= \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b, \text{ op voorwaarde dat } \cos b \neq 0, \\
\sin c &= \operatorname{cotg} B \operatorname{tg} b, \text{ op voorwaarde dat } \operatorname{cotg} b \neq 0, \\
\sin b &= \operatorname{cotg} C \operatorname{tg} c, \text{ op voorwaarde dat } \operatorname{cotg} c \neq 0.
\end{aligned}$$

We leiden hieruit af dat, in een rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$, geldt dat

$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin(\frac{\pi}{2} - b) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - c), \\
&= \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C, \\
\cos B &= \sin C \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - b) \\
&= \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c), \\
\cos C &= \sin B \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - c) \\
&= \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b), \\
\cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin a \cdot \sin B \\
&= \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c), \\
\cos(\frac{\pi}{2} - c) &= \sin a \cdot \sin C \\
&= \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b).
\end{aligned}$$

De makkelijkste manier om deze formules te onthouden is gebruik te maken van een mnemotechnisch middel dat we de *regel van Neper* of *regel van Mauduit* noemen. We rangschikken hiervoor de twee niet-rechte hoeken B en C van de rechthoekige boldriehoek, de zijde a en de complementen $\frac{\pi}{2} - b$ en $\frac{\pi}{2} - c$ van beide rechthoekszijden op de manier die aangegeven wordt door het schema in Figuur 15.



Figuur 15. *De regel van Neper*

De hierboven afgeleide formules stellen dan dat de *cosinus van een element uit het schema gelijk is aan het product van de cotangensen van de aanliggende elementen, en aan het product der sinussen van de overstaande elementen.*

Opmerking. Stel dat in de rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ één der zijden a, b of c gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$. Dan geldt dat

$$\cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - b)\sin(\frac{\pi}{2} - c) = 0,$$

en bijgevolg is ook een tweede zijde gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$. Verder zien we dat in dat geval $\operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C = 0$, waaruit volgt dat ook één der hoeken B of C gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$.

Opmerking. Beschouwen we een rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ waarin géén der zijden gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$. Door de tekens van de verschillende factoren in de formule

$$\cos a = \cos b \cos c$$

te vergelijken, kunnen we besluiten dat het aantal stompe zijden steeds even is (0 of 2), en dat er dus ofwel geen enkele, ofwel twee zijden stomp zijn.

Opmerking. We noemen twee elementen (zijden of hoeken) uit een boldriehoek *gelijksoortig* indien ze beide scherp, stomp of recht zijn. Omdat

$$\sin B \geq 0, \qquad \sin C \geq 0,$$

volgt uit

$$\cos B = \sin C \cos b, \qquad \cos C = \sin B \cos c,$$

dat, in elke rechthoekige boldriehoek, de rechthoekszijden en de overstaande hoeken gelijksoortig zijn.

Voorbeeld 1. In de boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 90°, \qquad b = 69°15,3' = 69°15'18'', \qquad c = 46°12,3' = 46°12'18''.$$

Omdat b en c scherp zijn, zijn ook B en C scherp, en omdat het aantal stompe zijden steeds even is, moet ook a scherp zijn. Verder volgt uit de regel van Neper dat

$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin(\frac{\pi}{2} - b)\sin(\frac{\pi}{2} - c),\\
\cos(\frac{\pi}{2} - c) &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b),\\
\cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c).
\end{aligned}$$

We besluiten dat

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c,\\
\operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c},\\
\operatorname{tg} C &= \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b},
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$a = 75°48^{'}35^{''} = 75°48,6^{'}, \qquad B = 74°42^{'}32^{''} = 74°42,5^{'}, \qquad C = 48°07^{'}10^{''} = 48°7,2^{'}.$$

Voorbeeld 2. In de rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 90°, \qquad a = 109°15,8^{'} = 109°15^{'}48^{''}, \qquad b = 37°9,3^{'} = 37°9^{'}18^{''}.$$

Omdat b scherp is, zal ook B scherp moeten zijn. Omdat a stomp is, volgt dat c stomp moet zijn, en dat bijgevolg ook C stomp zal zijn. Verder vinden we door toepassing van de regel van Neper dat

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin(\frac{\pi}{2} - c)\sin(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos C &= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin B \sin a, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} \cos c &= \frac{\cos a}{\cos b}, \\ \cos C &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}, \\ \sin B &= \frac{\sin b}{\sin a}, \end{aligned}$$

en we leiden hieruit af dat

$$c = 114°27^{'}8^{''} = 114°27,1^{'}, \qquad C = 105°21^{'}26^{''} = 105°21,4^{'}, \qquad B = 39°46^{'}36^{''} = 39°46,6^{'}.$$

Voorbeeld 3. In de rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 90°, \qquad b = 106°13,8^{'} = 106°13^{'}48^{''}, \qquad C = 38°45,4^{'} = 38°45^{'}24^{''}.$$

Omdat b stomp is, zal ook B stomp moeten zijn. Omdat C scherp is, moet ook c scherp zijn, en bijgevolg zal a stomp zijn. Uit de regel van Neper leiden we in dit geval af dat

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c), \\ \cos B &= \sin C \sin(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos C &= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b), \end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \sin b \operatorname{tg} C, \\ \cos B &= \sin C \cos b, \\ \operatorname{tg} a &= \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}, \end{aligned}$$

en bijgevolg is

$$c = 37°37^{'}28^{''} = 37°37,5^{'}, \qquad B = 100°4^{'}36^{''} = 100°4,6^{'}, \qquad a = 102°47^{'}22^{''} = 102°47,4^{'}.$$

Voorbeeld 4. In de rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 90°, \qquad b = 138°46,4' = 138°46'24'', \qquad B = 125°10,6' = 125°10'36''.$$

Omdat b stomp is, zal ook één van de andere zijden stomp moeten zijn. Als a scherp is, zullen c en C stomp zijn, als a stomp is zullen c en C beide scherp zijn. Uit de regel van Neper volgt dat

$$\begin{aligned}\cos B &= \sin C \sin(\frac{\pi}{2} - b),\\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin a \sin B,\\ \cos(\frac{\pi}{2} - c) &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b),\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{\cos B}{\cos b},\\ \sin a &= \frac{\sin b}{\sin B},\\ \sin c &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}.\end{aligned}$$

Rekening houdend met de randvoorwaarden vinden we twee mogelijke oplossingen,

$$a = 53°44'4'' = 53°44,1', \qquad c = 141°51'33'' = 141°51,5', \qquad C = 130°0'21'' = 130°0,3',$$

en

$$a = 126°15'56'' = 126°15,9', \qquad c = 38°8'27'' = 38°8,5', \qquad C = 49°59'39'' = 49°59,7'.$$

Voorbeeld 5. In de rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 90°, \qquad a = 72°12,5' = 72°12'30'', \qquad B = 156°17,2' = 156°17'12''.$$

Omdat B stomp is moet ook b stomp zijn, en omdat a scherp is moeten c en C stomp zijn. Uit de regel van Neper leiden we af dat

$$\begin{aligned}\cos B &= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c),\\ \cos a &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} B,\\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin B \sin a,\end{aligned}$$

waaruit we afleiden dat

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} c &= \cos B \operatorname{tg} a,\\ \operatorname{tg} C &= \frac{1}{\cos a \operatorname{tg} B},\\ \sin b &= \sin B \sin a.\end{aligned}$$

Rekening houdend met het feit dat b stomp is, vinden we

$$c = 109°18'56'' = 109°18,9', \qquad C = 97°38'39'' = 97°38,7', \qquad b = 157°29'5'' = 157°29,1'.$$

Voorbeeld 6. In de rechthoekige boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 90°, \qquad B = 64°35,4' = 64°35'24'', \qquad C = 119°41,6' = 119°41'36''.$$

Omdat B scherp en C stomp is, besluiten we dat b scherp en c stomp is, en bijgevolg moet a eveneens stomp zijn. Uit de regel van Neper leiden we af dat

$$\begin{aligned}\cos a &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} B,\\ \cos B &= \sin C \sin(\frac{\pi}{2} - b),\\ \cos C &= \sin B \sin(\frac{\pi}{2} - c),\end{aligned}$$

en we besluiten dat

$$\begin{aligned}\cos a &= \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C},\\ \cos b &= \frac{\cos B}{\sin C},\\ \cos c &= \frac{\cos C}{\sin B}.\end{aligned}$$

Deze vergelijkingen oplossen levert dan

$$a = 105°43'2'' = 105°43,0', \qquad b = 60°23'57'' = 60°23,9', \qquad c = 123°15'29'' = 123°15,5'.$$

5. Oplossen van willekeurige boldriehoeken

Voor het oplossen van willekeurige driehoeken beperken we ons tot twee gevallen die een belangrijke rol spelen bij het oplossen van problemen in verband met navigatie en plaatsbepaling.

1. Drie zijden van een boldriehoek gekend

Wanneer de drie zijden a, b en c van een boldriehoek $\triangle ABC$ gekend zijn, kunnen we gebruik maken van de eerste cosinusregel

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,\\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,\end{aligned}$$

waaruit we afleiden dat

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.\end{aligned}$$

Voorbeeld 7. In de boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$a = 69°23,6' = 69°23'36'', \qquad b = 57°51,3' = 57°51'18'', \qquad c = 39°39,7' = 39°39'42''.$$

Dan volgt uit de cosinusregel dat

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$
$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$
$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

waaruit we afleiden dat

$$A = 96°7^{'}24^{''} = 96°7,4^{'}, \qquad B = 64°4^{'}55^{''} = 64°4,9^{'}, \qquad C = 42°41^{'}12^{''} = 64°41,2^{'}.$$

2. Twee zijden en de tussenliggende hoek gekend

Wanneer twee zijden b en c, en de tussenliggende hoek A van een boldriehoek $\triangle ABC$ gekend zijn, leiden we uit de eerste cosinusregel af dat

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

wat ons toelaat de derde zijde te bepalen.

Uit de cotangensregel volgt verder dat

$$\operatorname{cotg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B,$$
$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C,$$

waaruit we afleiden dat

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A},$$
$$\operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}.$$

Voorbeeld 8. In de boldriehoek $\triangle ABC$ is

$$A = 103°44,8^{'} = 103°44^{'}48^{''}, \qquad b = 98°33,8^{'} = 98°33^{'}48^{''}, \qquad c = 64°12,2^{'} = 64°12^{'}12^{''}.$$

Dan volgt uit de cosinusregel dat

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

en bijgevolg is

$$a = 106°2^{'}36^{''} = 106°2,6^{'}.$$

Uit de cotangensregel

$$\operatorname{cotg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B,$$
$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C,$$

leiden we af dat

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\frac{\sin c}{\operatorname{tg} b} - \cos c \cos A},$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A}{\frac{\sin b}{\operatorname{tg} c} - \cos b \cos A},$$

en we besluiten dat

$$B = 91°53^{'}48^{''} = 91°53,8^{'}, \qquad C = 65°30^{'}18^{''} = 65°30,3^{'}.$$