Hoofdstuk 4

Berekenen van regelaars

Doelstellingen

1. Regelaars kunnen berekenen voor stap- en sinusresponsies
2. Basiseigenschappen van een aantal regelaars kennen

4.1 Eigenschappen van een regelkring

Als we een regelaar in een regelkring plaatsen is het duidelijk dat het gedrag van dit systeem verandert wordt.Vermits wij zelf deze verandering doorvoeren is het mogelijk en niet meer dan normaal dat we een aantal eisen stellen aan deze verandering.De eigenschappen die we aan dit nieuw gecreerd systeem kunnen opleggen zijn legio maar er zijn steeds drie eisen die op natuurlijke wijze terugkomen.

- We wensen een systeem dat op zo'n manier geregeld wordt dat het geheel stabiel is. De stabiliteit wordt nog eens opgedeeld in
  - Absoluut stabiel: convergeert het systeem
  - Relatief stabiel: is er niet teveel overgangsverschijnsel
- We wensen een systeem dat de ingestelde waarde (setpunt) nauwkeurig volgt. Deze eis wordt nog eens opgedeeld in
  - Statische nauwkeurigheid of standfout
  - Dynamische nauwkeurigheid of ruisonderdrukking
- We wensen een systeem dat de ingestelde waarde zo snel mogelijk bereikt

4.2 Stabiliteit

Van nature uit zijn alle systemen stabiel. Het is echter door er op in te grijpen dat ze onstabiel worden.Met andere woorden, door te regelen maken we een systeem onstabiel.De terugkoppeling en de regelaar veranderen het systeem.Vooral de terugkoppeling heeft een grote invloed op het gedrag van een regelkring.

Zoals in het overzicht werd vernoemd wordt er een onderscheid gemaakt tussen absolute en relatieve stabiliteit.

4.2.1 Absolute stabiliteit

Een systeem is absoluut stabiel als dit systeem bij het aanleggen van een willekeurig ingangssignaal convergeert naar een eindige waarde.

Eigenlijk kunnen we ook stellen dat stabiliteit stelt dat het overgangsverschijnsel al dan niet uitsterft. Elke transfertfunctie wordt voorgesteld door een breuk van veeltermen. De nulpunten van de teller noemt men nullen en deze van de noemer polen. Als men de inverse Laplacetransformatie doorvoert van een veelterm (partieelbreuksplitsing) kan men deze functies voorstellen in het tijdsgebied.

De transfertfunctie krijgt nu als nieuwe noemer $1 + kG(s)H(s)$ en de polen worden dan gevonden door de noemer gelijk te stellen aan nul.

1. Een reele pool a geeft een reactie in het tijdsgebied e^{at}

2. Een complexe pool a+jb geeft in het tijdsgebied een reactie $e^{at}\sin(bt)$

Wat heeft dit voor gevolg op de stabiliteit

- Als $a > 0$ dan zal het uitgangssignaal in de tijd naar oneindig divergeren

$$\lim_{t\to+\infty} e^{at} = +\infty$$

  Dus het systeem is instabiel. Het is voldoende dat er één pool positief is om het systeem instabiel te maken.De totale reactie is de combinatie van alle reacties van het systeem.

- Als $a = 0$ dan is het systeem marginaal stabiel. Het bevindt zich op de rand van de stabiliteit.Het systeem zal bij de minste storing niet meer naar zijn evenwichtstoestand evolueren.

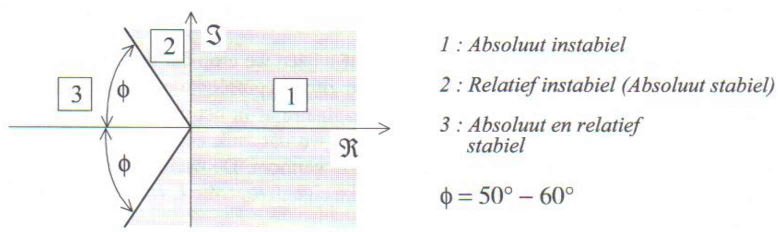
- Als $a < 0$ dan is het systeem absoluut stabiel.

Eigenlijk kan men de stabiliteitsvoorwaarde kort formuleren : de polen van de transfertfunctie van het systeem moeten in het linkerhalfvlak liggen.

4.2.2 Relatieve stabiliteit

Een systeem is relatief stabiel als het overgangsverschijnsel snel genoeg verdwijnt of indien er voldoende demping is in het systeem.

Om relatief stabiel te zijn moeten de polen niet enkel in het linkerhalfvlak liggen maar ook ver genoeg van de imaginaire as.



Figuur 4.1: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Graad van stabiliteit

Hiervoor gaan we kijken naar het gedrag van een systeem als we aan de ingang een sinus aanleggen.

De polen vinden we uit $KG(s)H(s) = -1$. Als dit gebeurt bevindt het systeem zich op de rand van de stabiliteit, het systeem is marginaal stabiel.

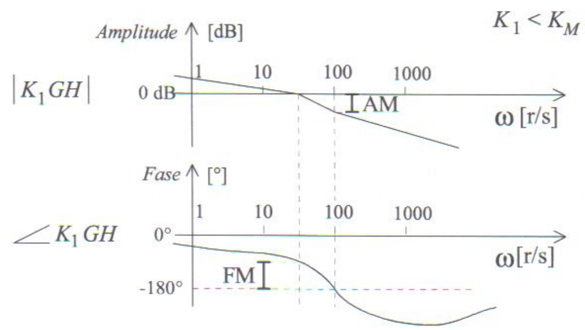
Deze voorwaarde vertaalt zich als volgt

1. Voor de modulus: M=1
2. Voor de fase: $\varphi = 180\,°$

Onder bovenstaande voorwaarden zal, zoals in het geval van een tweede orde proces, bij het aanleggen van een signaal aan de ingang het systeem een blijvende oscillatie vertonen. De voorgaande vergelijkingen geven aanleiding tot de vorming van voorwaarden voor relatieve stabiliteit.Deze voorwaarden leggen ons iets op ofwel op de fase ofwel op de amplitude. We gaan een veiligheidsmarge definiëren op deze parameters om systeem relatief stabiel te houden. Zo hebben we een bewegingsvrijheid in ons systeem, ten overstaande van de marginale stabiliteit, die het systeem bij eventuele storing de mogelijkheid geeft te reageren zonder in een onstabiele situatie te evolueren.Gewoonlijk neemt men een fasemarge van $\varphi = 35\,°$

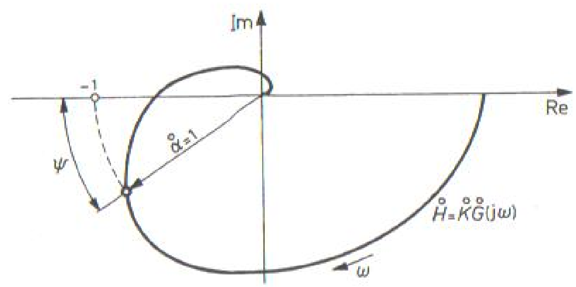
1. Fase: De fasemarge geeft aan hoeveel de fase bij een modulus van 1 mag afnemen voordat de waarde van $-180\,°$ bereikt wordt.
2. Amplitude: De amplitudemarge is de in te stellen versterking waarmee we de vector met fase $-180\,°$ moeten vermenigvuldigen om lengte 1 te bekomen.

Dit wordt eigenlijk mooi voorgesteld op een Bode en Nyquistdiagram.
Op het Bodediagram hebben we volgende voorstelling



Figuur 4.2: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Het Nyquistdiagram geeft volgende voorstelling voor de fasemarge ψ



Figuur 4.3: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

en onderstaande voor de amplitudemarge b

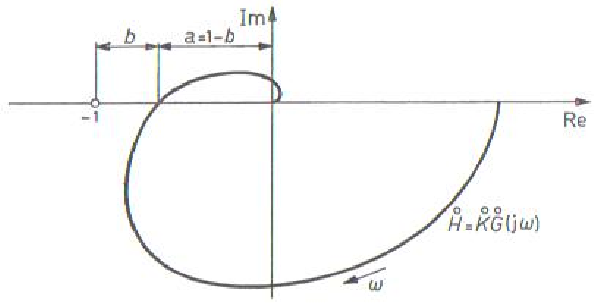
Hierbij dienen we de opmerking te maken dat de berekening van amplitude- en fasemarge in OPEN keten gebeuren en niet in gesloten keten. Desondanks kunnen we wel besluiten nemen over de gesloten keten.

4.3 Nauwkeurigheid

4.3.1 Statische nauwkeurigheid

De standfout is het verschil tussen het aangelegde signaal met grootte 1 en de uiteindelijke waarde van het uitgangssignaal.

Is het aangelegde ingangssignaal in grootte niet gelijk aan 1 nemen we de relatieve waarde. Het is dus eigenlijk de blijvende relatieve afwijking van de uitgang t.o.v. de ingang. Als we nu een regelketen hebben en dus automatisch



Figuur 4.4: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

ook een terugkoppeling, dan kan men bewijzen dat de terugkoppeling inherent aan het systeem een standfout introduceerd.

Dit nadeel kan men opheffen door een integrator in het systeem in te schakelen. We gaan dit bewijzen door een integrator los te laten op een eerste orde systeem Stel een eerste orde systeem en een integrator in de rechtdoorgaande en een éénheidsterugkoppeling. Het eerste orde systeem heeft transfertfunctie

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

De integrator heeft transfertfunctie

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Het inganssignaal is een stap

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

De statische fout is het verschil tussen ingang en uitgang dus $E(s) = X(s) - Y(s)$ Zonder integrator hebben we

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Daaruit volgt

$$E(s) = X(s) - \frac{G(s)X(s)}{1+G(s)}$$

Wat uiteindelijk oplevert

$$E(s) = \frac{X(s)}{1+G(s)}$$

We willen weten wat met de statische fout gebeurt na verloop van tijd dus moeten we het eindwaardetheorema toepassen. Zonder integrator hebben we dan

$$\lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s+a}} = \frac{a}{1+a}$$

Dit is verschillend van nul dus er zit een statische fout in dit systeem.

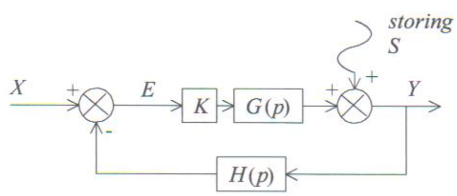
Met integrator wordt dit

$$\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s+a}\frac{1}{s}} = 0$$

Dus de statische fout is weggewerkt.

4.3.2 Dynamische nauwkeurigheid

Nu wordt op de regelkring een externe storing aangelegd die de uitgang zal beinvloeden. Het is de bedoeling om deze storing zo nauwkeurig mogelijk weg te werken.



Figuur 4.5: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Hiervan stelt men de transferfunctie op met de gekende methode, de rechtdoorgaande gedeeld door één plus de rondgaande, *vertrekkende van de storing*

De transfertfunctie van de storing wordt dus

$$\frac{1}{1+KG(s)H(s)}$$

Om de storing volledig weg te werken moet de noemer zeer hoog worden.

4.4 Snelheid

Uit theoretisch oogpunt gaat men de snelheid van een regelkring vergroten via de differentiërende werking.Met andere woorden men gaat een differentiator inbouwen in de regelkring en deze zo instellen dat de kring sneller reageert. Nochthans zijn er aan de differentiator heel wat nadelen verbonden en tracht men het gebruik van een differentiator zo veel mogelijk te vermijden. Er bestaat trouwens een veel elegantere manier om de regelkring te versnellen. Deze techniek noemt men pool-zero compensatie.Dit wordt duidelijk gemaakt in volgende paragraaf en in de oefeningen.

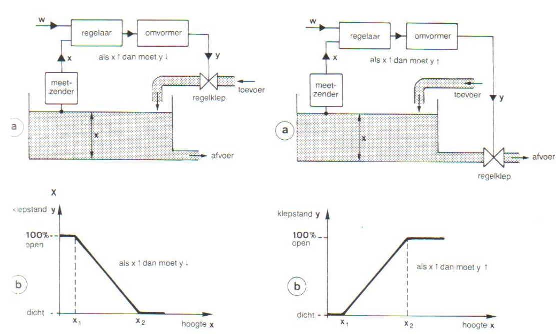
4.5 De klassieke regelaars

Er bestaan verschillende types regelaars maar we houden ons aan de klassieke types in dit hoofdstuk. Een regelaar bestaat maximaal uit drie componenten, namelijk een P,een I en een D component en elk heeft zijn functie.

- De proportionele regelaar: De proportionele actie of P-actie staat in voor de stabiliteit van de regelkring
- De integrerende regelaar: De integrerende actie of I-actie staat in voor de nauwkeurigheid van de regelkring.
- De differentiërende regelaar: De differentiërende actie of D-actie staat in voor de snelheid van de regelkring.

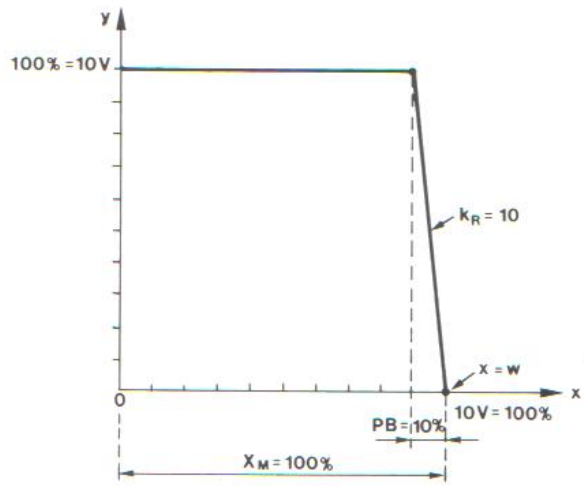
4.5.1 De P-regelaar

De P-actie gaat het ingangsignaal gewoon versterken.Als men als regelaar enkel een P-actie gebruikt moet men ermee rekening houden dat dit systeem een statische fout niet kan wegwerken. Als men dit systeem laat regelen en er treedt een externe storing op dan zal deze storing uitgeregeld worden. Als er echter een interne storing optreedt, bijvoorbeeld het setpunt wordt verandert, dan zal deze regeling wel stabiel blijven maar de statische fout wordt niet weggewerkt.Dus op zijn setpunt zal de P-actie voldoen, als men het setpunt verandert zal een statische fout worden geintroduceerd. In het geval van de proportionele regelaar kan men de versterking uitdrukken met behulp van de versterkingsfactor maar men kan ook werken met het begrip *proportionele band*.De proportionele band is de afstand die de meetwaarde x doorlopen moet opdat de uitgang y over zijn hele bereik versteld wordt. Onderstaande tekening geeft een voorbeeld



Figuur 4.6: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Het verband tussen versterking en proportionele band wordt mooi voorgesteld door onderstaande tekening



Figuur 4.7: bron: 'Regeltechniek1'; Die Keure

Bijvoorbeeld in het geval van een klepsturing

- PB 10% betekent : een verandering van de proceswaarde x over 10% doet de klepstand over 100% veranderen. De versterking bedraagt 10%
- PB 500% betekent : een verandering van de proceswaarde x over 500% doet de instelwaarde over 100% veranderen. De versterking bedraagt 0.2.

Grote versterking is kleine proportionele band dus krachtige regelactie,en kleine versterking is grote proportionele band dus zwakke regelactie.

4.5.2 De I-regelaar

Het foutsignaal wordt geintegreerd en vermenigvuldigt met $\frac{1}{\tau_i}$, met τ_i de tijdsconstante van de integrator. Door deze actie verdwijnt de statische fout uit het systeem. Het voordeel van de I-actie is het wegregelen van om het even welke statische fout.Het nadeel is echter dat bij een te grote tijdsconstante τ_i het systeem te traag reageert en bij een te kleine tijdsconstante het systeem onstabiel wordt door te snelle actie.

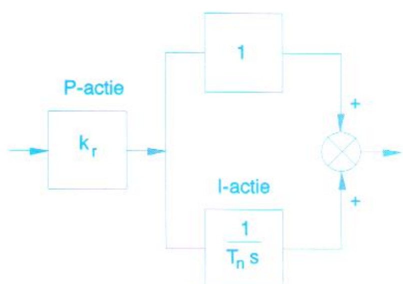
4.5.3 De D-regelaar

De D-actie is op zich als regelaar onbruikbaar.

4.5.4 De PI-regelaar

Ongeveer 85% van de regelaars zijn PI-regelaars om redenen reeds in vorige paragrafen vernoemd. Deze regelaars zullen zowel stabiel als nauwkeurig zijn. De snelheid kan men beinvloeden door een goede keuze van de K en de τ_i waarde,want men kan de snelheid instellen door pool-zero compensatie. Deze techniek stelt dat de keuze voor de tijdsconstante zodanig is dat men de zwaarste pool uit het te regelen systeem zal wegcompenseren om zo het geregelde systeem stabieler en sneller te maken.Bovendien wordt het rekenwerk ook een stuk vereenvoudigd. Deze techniek gaan we dan ook toepassen in de oefeningen.

Voor de keuze van een PI-regelaar heeft men twee mogelijkheden namelijk de parallel en de serie PI-regelaar. Meestal opteert men voor de parallel regelaar zoals hieronder afgebeeld



Figuur 4.8: bron: 'Regeltechniek1';Die Keure

Er moet echter een belangrijke opmerking gemaakt worden bij het gebruik van pool-zero compensatie. Deze techniek is inderdaad goed om een stabiel,nauwkeurig en snel regelsysteem te creëren doch dit geldt in het geval voor een proces waarbij men vooropsteld dat de regeling zijn instelwaarde zo snel en nauwkeurig mogelijk dient te bereiken. Als men vooropsteld in de eisen dat het systeem zo snel en nauwkeurig mogelijk een externe storing moet inregelen zal men de voorkeur geven aan de theorie van het symmetrisch optimum. Deze theorie is wiskundig heel wat moeilijker en valt buiten het bestek van de cursus.

4.5.5 De PD-regelaar

Deze regelaar wordt veel toegepast in servosystemen waar het systeem heel snel de ingestelde waarde moet volgen.

4.5.6 De PID-regelaar

Dit systeem wordt ook wel toegepast maar vermits de snelheid voor een groot deel geregeld wordt door een goede instelling van de I-actie wordt de D-actie voor een stuk overbodig.

4.6 Berekenen van een regelaar voor een stapresponsie

Nu gaan we een regelaar berekenen. We stellen dat we

- enkel met PI-regelaars werken
- pool-zero compensatie toepassen

Om een regelaar te berekenen voor een stapantwoord werd er in het verleden een criterium opgesteld door twee onderzoekers Routh en Hourwitz en dit criterium werd ook naar hen genoemd. Dit criterium volgt uit het feit dat de coefficiënten van de noemer van de transferfunctie van de GESLOTEN keten,dus de polen, allen een negatief reel deel moeten hebben,of anders gezegd de polen moeten in het linkerhalfvlak liggen.

Als eerste moet men nakijken of al de coëfficienten van de noemer in de transfetfunctie allen positief zijn.Is dit zo dan doet men een tweede test. We moeten een tabel opstellen met de coefficiënten van de noemer van de transfertfunctie als volgt De noemer heeft volgende algemene vergelijking

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{s-2} + ... + a_1 s + a_0$$

De tabel wordt dan

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & ... \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & ... \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & ... \\
. & . & . & . & ... \\
. & . & . & . & ... \\
s^1 & . & . & . & ... \\
s^0 & . & . & . & ...
\end{array}$$

De waarden voor b en c moeten dan berekend worden als volgt

$$b_1 = a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}$$

$$b_2 = a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}$$

$$c_1 = a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{b_1} b_2$$

$$c_2 = a_{n-5} - \frac{a_{n-1}}{b_1} b_3$$

*Voorwaarde:*De elementen van de eerste kolom moeten allemaal positief zijn, dan is het systeem stabiel op een stapresponsie.

Oefening:

Bereken een PI-regelaar opdat volgend systeem stabiel reageert op een stap aan de ingang.

Systeem: $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(2s+3)(5s+1)}$

Oplossing:

Er moeten van een PI-regelaar twee parameters berekend worden. Ten eerste de tijdsconstante van de integrator τ_i die we via pool-zero compensatie zullen berekenen. Ten tweede de versterkingsfactor K die we, vermits we een stap aanleggen, via het criterium van Routh Hourwitz zullen berekenen.

a) de tijdsconstante τ_i De PI-regelaar (parallel) heeft als algemene overdrachtsfunctie

$$R(s) = \frac{K_R(1 + \tau_i s)}{\tau_i s}$$

Dan wordt de transfertfunctie van de regellus

$$G(s) = \frac{R(s)H(s)}{1 + R(s)H(s)}$$

Pool-zero compensatie houdt in dat de term in de teller weg gecompenseerd wordt met een term in de noemer van de transfertfunctie van de regellus.Dit heeft tot doel het systeem stabiel te maken, want hoe minder polen ,hoe stabieler het systeem zal zijn. Als we echter een goede keuze maken en de zwaarste pool weg compenseren zal het systeem ook sneller reageren. Zo hebben we twee vliegen in één klap.Wat is nu de zwaarste pool? Dat is die pool die in het tijdsgebied het traagste reageert.Een pool is een nulpunt van een veelterm van de noemer. De simpelste veelterm is een eerste orde syteem. De algemene vorm hiervan is

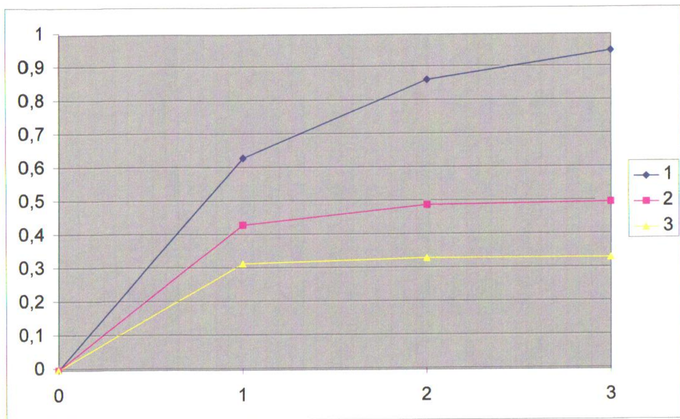
$$\frac{1}{s+a}$$

Dit systeem heeft als pool a en reageert in het tijdsgebied op een stap als

$$1(t) - exp(at)$$

.

Dit gedrag wordt weergegeven in onderstaande grafieken voor verschillende waarden van a.(a=1/2/3)



Men ziet onmiddellijk dat de grootste waarde van het traagste convergeert naar de eindwaarde 1(t). Deze waarde zullen we weg compenseren zodat het systeem in zijn geheel sneller naar deze waarde kan convergeren.

In deze oefening hebben we vier eerste orde systemen namelijk (s+1),(s+2),(2s+3) en (5s+1). De polen zijn dan 1,2,3/2 en 1/5. De zwaarste pool is in dit geval 2, welke we dan ook wegcompenseren. De tijdsconstante $\tau_i$wordt dan

$$\tau_i s + 1 = s + 2$$

De laatste vergelijking wordt herschreven als

$$\tau_i s + 1 = 2(\frac{s}{2} + 1)$$

De waarde van τ_i bekomt men dan door de twee gelijkwaardige termen te vergelijken.

De eerste orde systemen moeten in hun termen gelijkwaardig zijn dus de laatste termen moeten gelijk zijn aan 1 om onderling te kunnen vergelijken

Dus $\tau_i = \frac{1}{2}$

b) de versterkingsfactor:

Nu passen we het criterium van Routh Hourwitz toe. De transfertfunctie wordt berekend in GESLOTEN keten en wordt dus

$$G(s) = \frac{K_R \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)(2s+3)(5s+1)}}{1 + K_R \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)(2s+3)(5s+1)}}$$

Uitgewerkt wordt de noemer:$10s^4 + 27s^3 + 20s^2 + 3s + K$ In tabel wordt dit

s^4	10	20	K
s^3	27	3	0
s^2	19	K	0
s	3-1,42K	0	0
s^0	2K	0	0

De eerste vergelijking met K komt uit $3 - \frac{27}{19}K = 3 - 1,42K$ en levert op K=2,1

De tweede vergelijking levert K=0.

Met andere woorden $0 > K > 2$. We mogen de versterkingsfactor maar instellen tussen 0 en 1.

4.7 Berekenen van een regelaar voor een sinusresponsie

In het geval van sinusresponsies gaan we op dezelfde manier te werk. Eerst pool-zero compensatie en daarna berekenen we de versterkingsfactor. Voor het berekenen van de versterkingsfactor moeten we echter met een ander wiskundig arsenaal werken namelijk dat van de complexe getallen.

Oefening:

Bereken voor dezelfde transferfunctie een PI-regelaar en teken het bodediagram na pool-zero compensatie. (Voor de éénvoud stel de teller gelijk aan 1).We stellen voorop dat we een marginaal stabiel systeem willen hebben.

Oplossing:

Het doorvoeren van de pool-zero compensatie verloopt exact hetzelfde als in het geval van het stapantwoord. We houden dus dezelfde transfertfunctie over. Als eerste moeten we dan de transfertfunctie opstellen in OPEN keten.Dit wordt

$$\frac{K}{10s^4 + 27s^3 + 20s^2 + 3s}$$

Vervangen van s door$j\omega$

$$\frac{K}{10(\omega^4 - 2\omega^2) + 3j(-9\omega^3 + \omega)}$$

We hebben een complex getal in de noemer Hiervan moeten we modulus en argument berekenen

Modulus:

$$M = \sqrt{K^2 \frac{(10\omega^4 - 20\omega^2)^2 + (-27\omega^3 + 3\omega)^2}{((10\omega^4 - 20\omega^2)^2 + (-27\omega^3 + 3\omega)^2)^2}} = 1$$

Na vereenvoudiging krijgen we

$$M = \frac{K}{\sqrt{(10\omega^4 - 20\omega^2)^2 + (-27\omega^3 + 3\omega)^2}} = 1$$

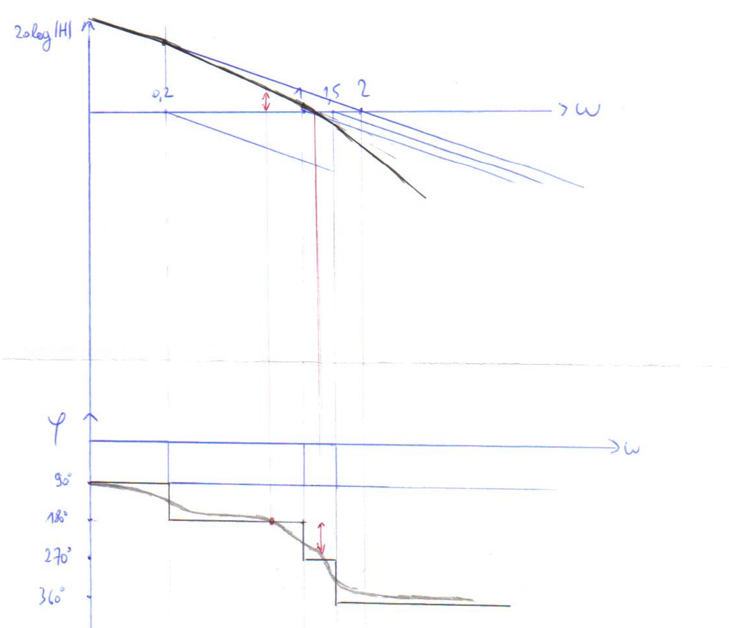
We hebben twee onbekenden in deze vergelijking staan, K en ω en is dus onderbepaald daarom moeten we een tweede vergelijking opstellen en daartoe gebruiken we de vergelijking van het argument

Argument:

$$\arctan \frac{-(-27\omega^3 + 3\omega)}{10\omega^4 - 20\omega^2} = \pi$$

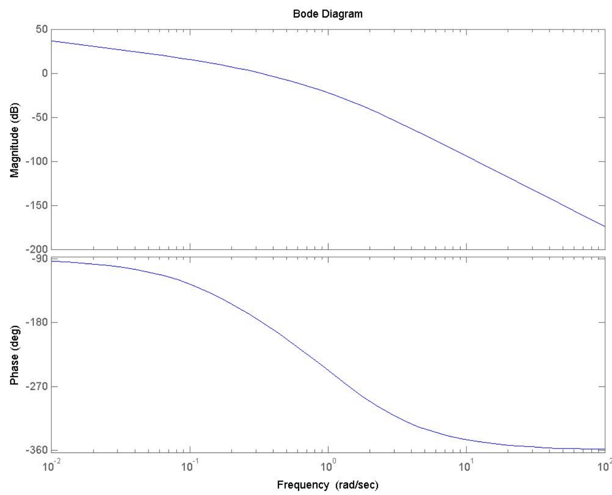
In de vergelijking van het argument staat slechts één onbekende en deze vergelijking kunnen we dus oplossen. We nemen van beide zijden de tangens en vinden voor de pulsatie ω de waarden 0 en 1/3. 0 wordt verworpen als fysische oplossing. Dan vullen we de waarde 1/3 in in de vergelijking van de modulus en vinden voor K de waarde 2,1

Het bodediagram in de limiet is



GEEN FM of AM ⇒ systeem moet verzwakt worden

Getekend met behulp van Matlab wordt dit



Normaal wordt nooit een marginaal stabiel systeem vooropgesteld maar werkt men met een fasemarge van $40\,°$ a $50\,°$. Dit bemoeilijkt gewoon het rekenwerk maar de methode blijft exact hetzelfde. De vergelijking voor het argument bij een fasemarge van bijvoorbeeld $40\,°$ wordt

Argument:

$$\arctan \frac{-27\omega^3 + 3\omega}{10\omega^4 - 20\omega^2} = \pi - \frac{2\pi}{9} = 140\,°$$