Hoofdstuk 6

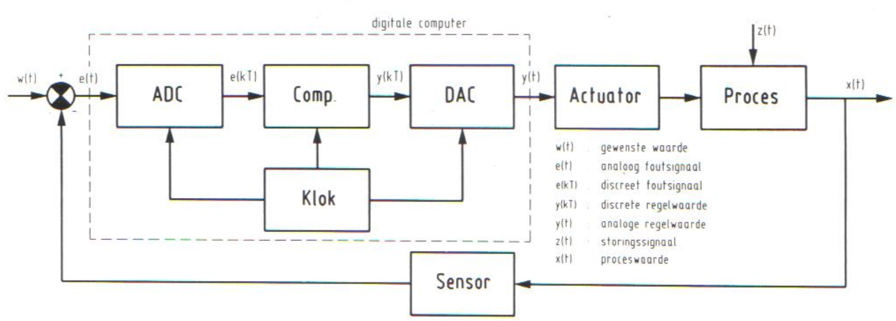
Digitale systemen

Doelstellingen

1. Weten dat digitale systemen andere stabiliteitsvoorwaarden hebben

In deze tijd van digitalisatie is het gebruik van computers in regelkringen alom.Denk maar aan het gebruik van PLC, wat eigenlijk een microcomputer is.Hoe langer hoe meer vindt de computer zijn toepassing in de regeltechniek. Daarom is het noodzakelijk eens te kijken naar digitale systemen.

6.1 De digitale regelaar



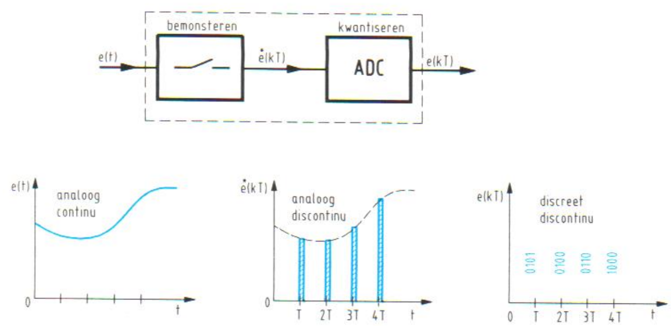
Figuur 6.1: bron:'Regeltechniek3', Die Keure

Bovenstaande figuur geeft het blokschema weer van de digitale regelaar. Omdat een computer enkel met digitale grootheden werkt moet voor de computer een module aangebracht worden die de continue signalen omzet naar digitale signalen. De module die de analoge waarden omzet in digitale waarden noemt men de analoog digitaal converter of AD-converter. Zo moeten later de digitale waarden omgezet worden in analoge waarden en dit gebeurt dan in de digitaal-analoog converter of DA-converter.

Het omzetten van analoge naar digitale waarden noemt men bemonsteren of samplen.

6.2 Van analoog naar digitaal: bemonstering

De ADC bemonstert analoge signalen.Deze sampling gebeurt op geregelde tijden, op elke T seconden.Er wordt dus elke T seconden een schakelaar gesloten gedurende Δt seconden. Deze omzetting wordt voorgesteld door onderstaande schakeling



Figuur 6.2: bron: regeltechniek3, Die Keure

De omzetter moet wel aan een aantal parameters voldoen om geschikt te zijn, zoals resolutie en nauwkeurigheid.

Onder resolutie verstaat men *de kleinste analoge verandering die nog als digitale waarde aan de uitgang waar te nemen is.*

Zo heeft een 4-bit converter $2^4 = 16$ mogelijke uitgangsniveau's. Dit geeft een resolutie van $\frac{1}{16} = 6.25\%$ van de schaalverdeling.

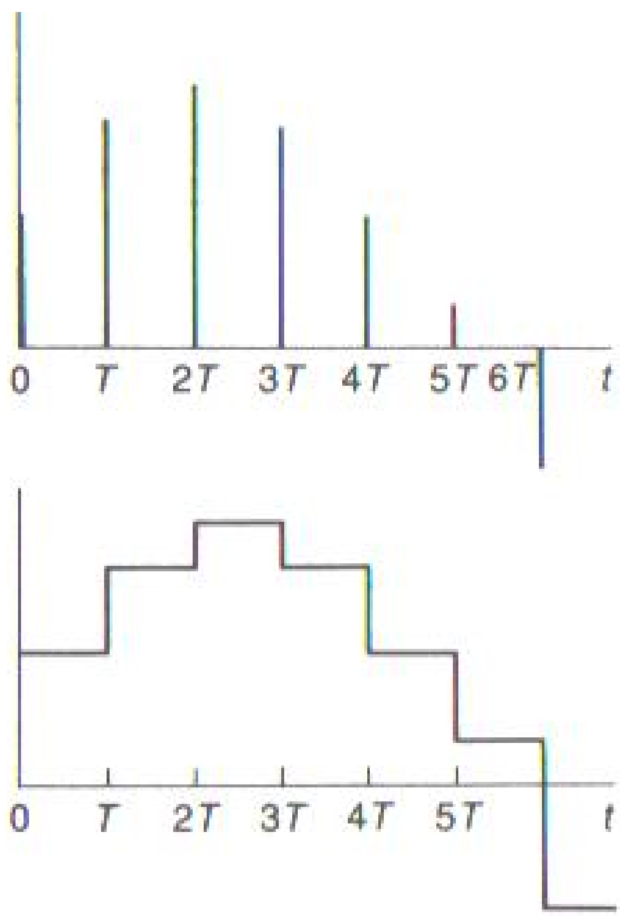
Onder nauwkeurigheid verstaat men *de hoeveelheid waarmee het uitgangssignaal kan afwijken van de theoretische waarde die met de exacte ingangswaarde zou moeten overeenstemmen.*

Indien geen compensatie wordt toegepast kan deze fout een waarde hebben gelegen tussen 0 en de waarde van de minst beduidende bit.

Bijkomende problemen zijn de bemonsteringsduur, hoe lang bemonsteren we, en de bemonsteringsfrequentie, hoeveel bemonsteren we.

6.2.1 Bemonsteringsduur:de houdschakeling

De bemonstering neemt een bepaalde tijd in beslag die de conversietijd van de ADC wordt genoemd. De tijd is gemiddeld begrepen tussen milli en nanoseconden.Het continue signaal is echter veel sneller (in theorie oneindig veel sneller) en er kunnen belangrijke veranderingen plaatsvinden in het analoge signaal. Daarom zou het ook kunnen dat het digitale signaal niet meer de exacte weergave is van het analoge. Daarom wordt de AD converter vooraf gegaan door een sample en hold schakeling. Dit is een schakelaar die op regelmatige tijdstippen gesloten wordt en van het analoge signaal een momentopname maakt. Deze momentopname kan dan in een digitaal signaal omgezet worden. Meestal neemt men voor de sample en hold schakeling wat men noemt de zero order hold wat betekent dat de waarde die gemeten werd bij het sluiten van de ingang gedurende de bemonsteringstijd ook behouden blijft.



Figuur 6.3: bron: regeltechniek3, Die Keure

Op onderstaande figuur ziet men dat de bemonsteringstijd Δt het verschil is tussen de twee sampletijdstippen T_n en T_{n+1} en dat de beginwaarde behouden blijft. Zo bestaan er ook first order hold en second order hold die allemaal hun voor- en nadelen hebben maar dit valt buiten het bestek van de cursus.

6.2.2 Bemonsteringfrequentie

Rond dit probleem bestaat een zeer belangrijke stelling namelijk de stelling van Shannon die van fundamenteel belang is in deze theorie. We gaan de stelling zelf niet bewijzen maar enkel vernoemen.

De bemonsteringsfrequentie van een periodisch signaal moet minstens het dubbele bedragen van de hoogste frequentie die in het analoge signaal aanwezig is. Met andere woorden

$$f_s > 2f_{max}$$

6.3 Wiskundige beschrijving

In deze paragraaf wordt enkel de wiskundige inleiding gegeven op een zeer uitgebreide theorie. Het is de bedoeling enkel te doen aanvoelen hoe digitale of discontinue problemen worden opgelost.

Om de *holdschakeling* (zero order hold)wiskundig te beschrijven grijpen we terug naar de Laplacetransformatie. Op tijdstip t=0 start de eerste bemonstering. Een bemonstering is niet meer dan een impuls met hoogte f(0), de functiewaarde van het te bemonsteren signaal op tijdstip t=0.Een zero order hold is een stap, en een stap in het s-gebied is $\frac{1}{s}$.Een bemonsteringsduur t=T later moet deze stap gecompenseerd worden om een nieuwe stap aan te leggen op de nieuwe functiewaarde f(T). Dat signaal dat op een later tijdstip opgenomen wordt is eigenlijk hetzelfde signaal maar verschoven in de tijd en met dezelfde maar negatieve amplitude. We moeten dus het verschuivingstheorema toepassen. We verschuiven dezelfde stap over een tijd T.Dus de Laplacegetransformeerde van de tweede stap wordt $e^{-Ts}\frac{1}{s}$.

Van beide moeten we de som nemen om de eerste bemonstering te modeliseren en voor een zero order hold verkrijgen we

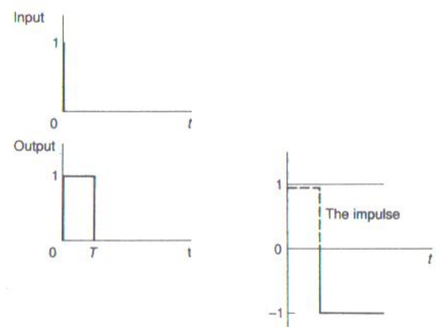
$$\frac{1}{s} - e^{-Ts}\frac{1}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

De *bemonstering* is eigenlijk een som van impulsfuncties,die voortkomen vanuit de meting op een bepaald punt in de tijd, en op tijdstip t=nT bekomen we dus

$$f^*(t) = f(0)(impuls0)+f(T)(impulsT)+f(2T)(impuls2T)+...+f(nT)(impulsnT)$$

Dit wordt na de Laplacetransformatie te nemen en uitgewerkt in het s-gebied

$$F^*(s) = (F(0)stap(s)+F(T)e^{-Ts}stap(s)+F(2T)e^{-2Ts}stap(s)+...+F(nT)e^{-nTs}stap(s))$$



Figuur 6.4: bron: regeltechniek3, Die Keure

Let op want de impuls in het t gebied wordt een stap in het s gebied

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F(nT)e^{-nTs}1(s)$$

Stel nu $z = e^{Ts}$ en dus $s = \frac{\ln z}{T}$

Dan kunnen we de reeks herschrijven als

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(nT)z^{-n}$$

met F(T) de gemeten waarde op tijdstip T. Deze transformatie noemt men de Z-transformatie en wordt gebruikt om discrete systemen mee te beschrijven. Als we de functiewaarde f(T) gelijk stellen aan 1, dus werken we met de éénheidsstap, kunnen de reeks herschrijven als

$$F(z) = z^{-0} + z^{-1} + z^{-2} + ...z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

We hebben te maken met een frequentieantwoord want het samplen gebeurt met een bepaalde frequentie. Dus z is een complex getal.Vermits $z = e^{sT}$ en $s = a + jb$ kunnen we z herschrijven als

$$z = |z|e^{j\angle z} = e^{aT}e^{jbT}$$

De stabiliteitsvoorwaarde was dat de polen in het linkerhalfvlak moesten liggen met andere woorden $a < 0$.

$$|z| = e^{aT} < 1$$

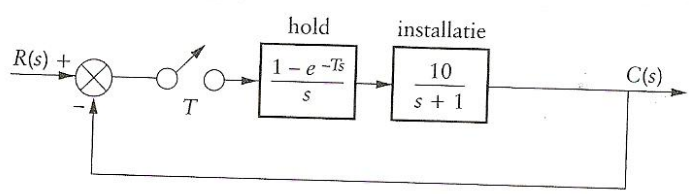
want een exponentiele met in de macht iets kleiner dan nul, dus iets negatief is steeds kleiner dan 1. Anders gesteld kunnen we ook zeggen dat na lange tijd, dus de limiet naar oneindig in de tijd,de grootte, dus modulus, eindig moet blijven.De modulus van z is e^{aT} en om dit eindig te houden moet a noodzakelijkerwijs negatief zijn of de modulus is kleiner dan 1.

Met andere woorden de stabiliteitsvoorwaarde wordt nu:

Al de polen van het systeem moeten in de éénheidscirkel afgebeeld worden.

6.4 Oefening

Met deze oefening illustreren we dat de sampling time een invloed uitoefend op de stabiliteit van het systeem.



Figuur 6.5: bron:'Regeltechniek voor technici',Norman S.Nise

We zien in de loop dat we enerzijds een eerste orde systeem hebben namelijk

$$\frac{10}{s+1}$$

en de zero order hold

$$\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

. We moeten voor deze oefening gebruik maken van de tabel gegeven op het einde van dit hoofdstuk want we hebben te maken met discrete systemen dus moeten we werken met Z-transformaties.

De gesloten lus is

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

en later moeten we dan G(s) omzetten naar G(z). Voor G(s) krijgen we dan

$$\frac{10(1-e^{-Ts})}{s(s+1)}$$

Hierop passen we partieelbreuksplisting toe en krijgen we

$$10(1-e^{-Ts})(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)})$$

We zetten term per term om naar z getransformeerde met $z = e^{Ts}$en dan krijgen we

1. $(1-e^{-Ts}) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$
2. $\frac{1}{s} = \frac{z}{z-1}$(rij 1 tabel)
3. $\frac{1}{s+1} = \frac{z}{z-e^{-T}}$(rij 4 tabel)

Nu al kunnen we in de derde term zien dat de stabiliteit van het systeem afhangt van T dus van de sampling time.

Na invullen en vereenvoudiging krijgen we

$$T(z) = \frac{10(1-e^{-T})}{z-(11e^{-T}-10)}$$

De stabiliteitsvoorwaarde was dat de polen in de eenheidscirkel lagen met andere woorden de norm van de pool is kleiner dan 1.

De pool is nu

$$a = 11e^{-T} - 10$$

Dit wil zeggen dat

$$|11e^{-T} - 10| < 1$$

Of na berekening

$$0 < T < 0,2$$

De sampling time moet kleiner zijn dan 0,2 seconden of het systeem wordt onstabiel.

850 | REGELTECHNIEK VOOR TECHNICI

TABEL 13.1 Deeltabel van z- en s-getransformeerden

	$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$f(kT)$
1.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$u(kT)$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	kT
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^n\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}
5.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$(-1)^n\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n e^{-akT}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\sin\omega kT$
7.	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\cos\omega kT$
8.	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\sin\omega kT$
9.	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\cos\omega kT$

TABEL 13.2 z-transformatiestellingen

	Stelling	Naam
1.	$z\{af(t)\} = aF(z)$	lineariteitsstelling
2.	$z\{f_1(t)+f_2(t)\} = F_1(z)+F_2(z)$	lineariteitsstelling
3.	$z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{aT}z)$	complexe differentiatie
4.	$z\{f(t-nT)\} = z^{-n}F(z)$	reële translatie
5.	$z\{tf(t)\} = Tz\frac{dF(z)}{dz}$	complexe differentiatie
6.	$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$	beginwaardestelling
7.	$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$	eindwaardestelling

Opmerking: kT kan in de tabel voor t worden gesubstitueerd.

Figuur 6.6: bron:'Regeltechniek voor technici',Norman S.Nise